

Physikalisches Anfängerpraktikum (P1)

P1-31,40,41: Geometrische Optik

Benedikt Zimmermann, Matthias Ernst (Gruppe Mo-24)

Karlsruhe, 18.1.2010

Praktikumsprotokoll mit Fehlerrechnung

Ziel des Versuchs ist die Beschäftigung mit der geometrischen Optik.

1 Bestimmung von Brennweiten

1.1 Kontrolle der angegebenen Brennweite einer dünnen Sammellinse

Eine Sammellinse bündelt parallel einfallendes Licht im Brennpunkt. Die einfachste Methode zur Kontrolle der Brennweite einer Linse besteht also darin, parallel einfallendes Licht wie das Sonnenlicht mit einer Sammellinse zu auf einem Schirm so zu bündeln, dass es in einem Punkt abgebildet wird. Steht der Schirm parallel zur Linsenebene, so kann der Abstand des Schirms von der Linsenebene gemessen werden, dies ist dann direkt die Brennweite.

1.2 Brennweitenbestimmung nach dem Besselschen Verfahren und chromatische Aberration

Ein besseres Verfahren zur Bestimmung der Brennweite einer Linse, das ohne Kenntnis der Linsenebene auskommt, geht auf Bessel zurück. Für die scharfe Abbildung eines Gegenstands im Abstand g („Gegenstandsweite“) von einer dünnen Linse mit Brennweite f auf einem im Abstand b („Bildweite“) zur Linse aufgestellten Schirm gilt die Linsengleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad (1)$$

Bezeichnet man nun den Abstand zwischen Objekt und Bild mit e , so folgen aus $g = e - b$ nach Einsetzen in die Linsengleichung, Umformen, Auflösen nach b und Lösen der dabei resultierenden quadratischen Gleichung zwei mögliche Positionen des Bildes:

$$b_{1,2} = \frac{e}{2} \pm \sqrt{e \left(\frac{e}{4} - f \right)} \quad (2)$$

Dies bedeutet, dass der Abstand des Objekts zu dessen Abbildung größer als die vierfache Brennweite der Linse sein muss, also $e > 4f$, damit diese Abbildung überhaupt möglich ist. Außerdem folgt, dass es zwei Positionen gibt, an denen das Bild scharf abgebildet werden kann. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass für $b > g$ eine Vergrößerung resultiert, ist aus der Gleichung

schließlich ersichtlich, dass eine dieser beiden Abbildungen das Objekt vergrößert, während es die andere verkleinert darstellt. Aus dem Abstand $d = |b_1 - b_2| = \sqrt{e^2 - 4f}$ der beiden Positionen der scharfen Abbildungen lässt sich die Brennweite der Linse bestimmen gemäß

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e}. \quad (3)$$

Auf dieselbe Weise und nach völlig analoger Rechnung lässt sich die Brennweite auch aus dem Abstand $d' = |g_1 - g_2|$ der beiden Positionen des Gegenstands (statt wie oben des Bildes) in beiden Positionen, die zu einer scharfen Abbildung führen, bestimmen. Experimentell müssen für einen festgelegten Abstand e von Objekt und Bild die Positionen gefunden werden, bei denen das Objekt scharf abgebildet wird, daraus kann gemäß Gleichung 3 die Brennweite berechnet werden. Allerdings sollte e nicht sehr viel größer als $4f$ werden, da ansonsten das verkleinerte Bild sehr klein wird, was die Bestimmung, wann es scharf ist, erschwert.

Die Bestimmung der Brennweite wird allerdings durch Abbildungsfehler der Linse erschwert, von denen hier die sphärische und die chromatische Aberration untersucht werden. Die *sphärische Aberration* liegt darin begründet, dass Linsen in der Regel aufgrund des einfacheren und billigen Herstellungsprozesses kugelförmig, also sphärisch geschliffen werden. Dies bewirkt jedoch, dass parallel auf verschiedenen Stellen der Linse einfallende Strahlen nicht, wie sonst angenommen, alle durch den Brennpunkt gebrochen werden, vielmehr nimmt die Brennweite von der zentralen Achse der Linse nach außen hin ab. Das Objekt wird daher unscharf abgebildet. Die *chromatische Aberration* resultiert aus der Dispersion des Linsenmediums, also der Frequenzabhängigkeit des Brechungsindices. Daher hängt auch die Brennweite von der Frequenz des einfallenden Lichtes ab, insbesondere wird blaues Licht stärker gebrochen als rotes, was zu „Farbsäumen“ an Kanten des Bildes führt.

Um diese beiden Arten von Bildfehlern zu untersuchen, wird die oben beschriebene Bestimmung der Brennweite jeweils mehrfach für rotes und blaues Licht (mittels Farbfiltergläsern) sowie für das innere und äußere Linsengebiet (mittels Loch- und Scheibenblenden) durchgeführt.

1.3 Bestimmung der Brennweite eines Zweilinsensystems nach dem Abbeschen Verfahren

Für ein Zweilinsensystem können die Brennweite des Gesamtsystems sowie der einzelnen Linsen nach dem Abbeschen Verfahren bestimmt werden, auch wenn Gegenstands- und Bildweite bzw. die Lage der Hauptebenen nicht bekannt sind. Vielmehr definiert man bestimmte „Marken“, deren Abstand x zum abgebildeten Gegenstand gemessen werden kann. Wieder ist der Ausgangspunkt die oben gezeigte Linsengleichung, wobei nun der Abbildungsmaßstab $\beta = \frac{b}{g} = \frac{B}{G}$ mit Bildgröße B und Gegenstandsgröße G verwendet wird. Durch Umformen lässt sich der Kehrwert des Abbildungsverhältnisses schreiben als

$$\frac{1}{\beta} = \frac{g}{f} - 1 \quad (4)$$

Verwendet man nun die Position der oben eingeführten Marke, die sich im (noch unbekanntem) Abstand l zur Hauptebene zwischen dieser und dem Gegenstand befindet, also $x = g + l$ bzw. $g = x - l$, so erhält man eine Geradengleichung in x :

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}x - \frac{l}{f} - 1 \quad (5)$$

Durch Setzen mehrerer Marken, Messen des Abstands x zum abgebildeten Gegenstand sowie der Vergrößerung des Gegenstands kann also durch Auftragung der inversen Vergrößerung über diesem

Abstand aus der Steigung einer Regressionsgeraden die Brennweite des gesamten Linsensystems bestimmt werden, der Abstand l zur Hauptebene aus deren Achsenabschnitt. Durch Messung „auf der anderen Seite“ des Zweilinsensystems, also nach Drehung um 180° , kann auch der Abstand l' der Marke zur zweiten Hauptebene bestimmt werden. Der Abstand der beiden Hauptebenen ist dann $d = |l + l'|$. Für die Gesamtbrennweite des Systems gilt

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{f_1 f_2} d + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (6)$$

Auch dies ist die Gleichung einer Geraden, nun in d . Durch Variation des Abstands d der beiden Linsen und jeweils Messung der Brennweite des Systems lassen sich also mittels abermaliger linearer Regression die einzelnen Brennweiten f_1 und f_2 bestimmen. Die Regressionsgerade hat die Steigung $m = -\frac{1}{f_1 f_2}$ und den Achsenabschnitt $c = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$. Die Brennweiten der einzelnen Linsen ergeben sich dann zu

$$f_{1/2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 + \frac{1}{m}} \quad (7)$$

2 Aufbau optischer Instrumente

2.1 Keplersches und Galileisches Fernrohr

Das *Keplersche Fernrohr* besteht aus zwei Sammellinsen unterschiedlicher Brennweite. Die Linse mit deutlich größerer Brennweite bildet das sog. Objektiv (das bei anderen Arten von Fernrohren auch aus mehreren optischen Elementen auf kompliziertere Weise aufgebaut sein kann), die Linse kleinerer Brennweite das Okular. Das Objektiv erzeugt ein reelles Bild des weit entfernten Gegenstands, das durch das Okular gleichsam wie durch eine Lupe betrachtet wird. Die Anordnung muss also dergestalt erfolgen, dass die Brennebenen beider Linsen zur Deckung kommen. Aus dem Strahlengang resultiert ein im Vergleich zum abgebildeten Objekt um 180° gedrehtes Bild. Für die Vergrößerung gilt

$$\Gamma_{\text{Kepler}} = \frac{f_{\text{Objektiv}}}{f_{\text{Okular}}} \quad (8)$$

Um wie in der Aufgabenstellung gefordert ein Fernrohr mit sechsfacher Vergrößerung zu erhalten, muss also die Brennweite der als Objektiv eingesetzten Linse sechsmal so groß wie die des Okulars sein. Die Vergrößerung des Fernglases lässt sich durch Erhöhung der Brennweiten einer oder beider Linsen vergrößern, dabei verlängert sich auch das gesamte Fernrohr.

Beim Galileischen Fernrohr wird als Objektiv wie beim Kepler-Fernrohr eine Sammellinse, als Okular aber eine Zerstreuungslinse verwendet. Auch hier kommen die Brennebenen zur Deckung, allerdings liegt die der Zerstreuungslinse nicht mehr zwischen dieser und der Sammellinse, sondern von der Sammellinse aus gesehen hinter der Zerstreuungslinse. Dadurch ist das Galileische Fernrohr insgesamt kürzer und das Bild erscheint nicht „auf dem Kopf“.

2.2 Diaprojektor

Für den Bau eines einfachen Diaprojektors ist neben dem Diapositiv und einer entsprechenden Halterung und einer Lichtquelle ein Kondensor, also eine Sammellinse, nötig, der die einfallenden Strahlen parallel parallel auf das Dia leitet sowie dafür sorgt, dass es gleichmäßig ausgeleuchtet wird sowie eine Sammellinse, durch die die einfallenden (parallelen) Strahlen auf einen Schirm treffen und dort ein vergrößertes, aber um 180° gedrehtes scharfes Bild des Diapositivs darstellen.

Im Versuch soll ein Diapositiv der Größe $24\text{mm} \times 36\text{mm}$ in einem Abstand von $1,5\text{m}$ mit zehnfacher Vergrößerung dargestellt werden, also $\frac{B}{G} = \frac{b}{g} = 10$, wobei $b = 1,5\text{m}$. Aus der Linsengleichung kann damit die benötigte Brennweite der Linse berechnet werden, sie beträgt $f \approx 13,6\text{cm}$.

2.3 Mikroskop

Einem Mikroskop liegt ein ähnliches Prinzip zugrunde wie einem Fernrohr, es besteht im einfachsten Fall ebenfalls aus zwei Sammellinsen unterschiedlicher Brennweite. Im Unterschied zum Fernrohr wird jedoch ein dem Objektiv sehr nahes Objekt, das sich fast im Brennpunkt der Objektivlinse befindet, abgebildet. Das Objektiv erzeugt ein reelles und bereits vergrößertes Bild, das durch das Okular nochmals wie durch eine Lupe betrachtet wird. Das Okular ist daher so angeordnet, dass das Zwischenbild in dessen Brennebene zu liegen kommt. Auf diese Weise kann der Beobachter ein virtuelles, nochmals deutlich vergrößertes, auf dem Kopf stehendes Bild des Objekts sehen.

Die Vergrößerung des gesamten Mikroskop setzt sich nach $\Gamma = V_{\text{Objektiv}}V_{\text{Okular}}$ aus der Vergrößerung des Objektivs und des Okulars zusammen. Da das abgebildete Objekt sehr nahe an der Brennebene der Objektivlinse befindet, ist $g \approx f_{\text{Objektiv}}$. Der Tubus zwischen den beiden Linsen hat die Länge t , das Zwischenbild befindet sich im Abstand $b = t - f_{\text{Okular}}$ zur Objektivlinse. Somit ist die Vergrößerung des Objektivs

$$V_{\text{Objektiv}} = \frac{b}{g} = \frac{t - f_{\text{Okular}}}{f_{\text{Objektiv}}} \quad (9)$$

Die Vergrößerung des Okulars hängt von der minimalen Entfernung s_0 ab, in der das Auge das virtuelle Bild scharf ansehen kann, sie beträgt damit

$$V_{\text{Okular}} = \frac{s_0}{f_{\text{Okular}}} \quad (10)$$

Die gesamte Vergrößerung des Mikroskops ist also

$$\Gamma = \frac{(t - f_{\text{Okular}})s_0}{f_{\text{Objektiv}}f_{\text{Okular}}} \quad (11)$$

Prinzipiell ließe sich also die Vergrößerung durch den Einsatz entsprechend kleiner Brennweite immer weiter verbessern. Dies versagt jedoch einerseits aufgrund der numerischen Apertur des Geräts, andererseits kommt ab einer bestimmten Kleinheit des Objekts die Wellennatur des Lichts zum Tragen. Demnach muss das abgebildete Objekt größer als die halbe Wellenlänge des verwendeten Lichts sein, um es noch auflösen zu können (ansonsten kommt es zu Interferenzeffekten).

3 Auswertung

3.0 Vorbemerkung zur Fehlerrechnung

Bei diesem Protokoll wird eine Fehlerrechnung durchgeführt. Dabei werden die systematischen Fehler diskutiert sowie die statistischen Fehler ausgewertet. Der Wert einer Messgröße x wird folgendermaßen angegeben:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x_{\text{stat}} \pm \Delta x_{\text{syst}} \quad (12)$$

Dabei ist \bar{x} der Mittelwert, Δx_{stat} der statistische Fehler (also bsp. die Standardabweichung) und Δx_{syst} der systematische Fehler der beispielsweise durch unvermeidliche Ungenauigkeiten bei der Messung auftrat. Der Mittelwert wird i.A. nach dem arithmetischen Mittel berechnet, hier für n Messungen der Größe x :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (13)$$

Für die Standardabweichung σ_x der Einzelmessungen einer Messgröße x gilt ausgehend von deren Mittelwert:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (14)$$

Da nun in der Regel nicht die Standardabweichung σ_x einer einzelnen Messgröße, sondern vielmehr die des Mittelwerts aus n Messungen, mit $\sigma_{\bar{x}}$ bezeichnet, von Interesse ist, wird diese nach folgender Formel berechnet:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_x \quad (15)$$

Hängt eine Größe $f(x_1, x_2, \dots)$ von anderen gemessenen und fehlerbehafteten Größen x_i ab, die jeweils einen systematischen Fehler Δx_i , so kann der daraus resultierende Fehler Δf mit einer Größtfehlerabschätzung bestimmt werden:

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots \quad (16)$$

Für Messgrößen, die ihrerseits bereits einen statistischen Fehler aufweisen (beispielsweise, weil sie einer Regression entstammen), wird eine Fehlerfortpflanzung nach Gauß durchgeführt:

$$\Delta f = \sqrt{\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|^2 \sigma_{\bar{x}_1}^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|^2 \sigma_{\bar{x}_2}^2 + \dots} \quad (17)$$

3.1 Messung der Brennweite einer dünnen Sammellinse

3.1.1 Messung mittels des Brennpunkts

Eine Sammellinse wurde, da die Sonne am Versuchstag nicht schien, mit dem Licht der Lichtquelle mit eingebauter Kondensorlinse bestrahlt. Diese liefert zwar keine perfekt parallele Strahlung (es war in der Tat die Glühwendel der Lampe recht scharf zu erkennen), jedoch annähernd paralleles Licht (die Schärfe der Glühwendel blieb über einen recht großen Bereich nahezu konstant). Hinter der Sammellinse wurde ein Schirm angebracht und so justiert, dass die Abbildung des Lichtstrahls möglichst klein wurde, wobei es nicht möglich war, diesen exakt punktförmig abzubilden. Folgende Werte wurden gemessen:

Abstand $d_{\text{Linse-Schirm}} = f$ in cm	16,8	16,6	17,1	16,6
---	------	------	------	------

Tabelle 1: Bestimmung der Brennweite mittels des Brennpunktes: Messwerte

Der Mittelwert aus diesen Messungen beträgt $\bar{d} = 16,8\text{cm}$, die Standardabweichung $\sigma_{\bar{d}} = 0,12\text{cm}$. Weiterhin wird der Messwert fehlerbehaftet, da die Position der der Linse nur auf etwa $0,5\text{mm}$ genau eingestellt werden kann, diese in ihrer Fassung auch nur mit geschätzt 1mm Genauigkeit fixiert ist und schließlich auf dem Schirm ein Millimeterpapier befestigt ist, das ungleichmäßig bis ca. 3mm hervorsteht (dies ließ sich ohne Zerstörung des Millimeterpapiers auch nicht beheben). Dies alles addiert sich zum systematischen Fehler $\Delta d_{\text{sys}} \approx 4,5\text{mm}$. Somit ist der gemessene Wert für die Brennweite $f = 16,8\text{cm} \pm 0,12\text{cm} \pm 0,45\text{cm}$. Dies deckt sich leider nicht mit dem angegebenen Brennwert der Linse von $f_{\text{soll}} = 15\text{cm}$, da dieser nicht im Fehlerbereich liegt. Möglicherweise wurde der systematische Fehler aufgrund der Messunsicherheiten unterschätzt. Wahrscheinlicher ist jedoch, da alle einzelnen Messwerte um mehr als $1,5\text{cm}$ zu groß ausfielen und da das Bild durch die Linse nie punktförmig war, dass das benutzte Licht nicht parallel einfiel und die Annahme, es sei „parallel genug“, nicht sonderlich zutreffend war.

3.1.2 Messung nach dem Bessel-Verfahren

Beim Bessel-Verfahren muss, wie in der Vorbereitung hergeleitet, der Schirm in einem Abstand $e > 4f$ zum abgebildeten Gegenstand aufgestellt werden. Ausgehend von den obigen Messwerten wurde daher zunächst $e_1 = 64\text{cm}$ gewählt. Als abgebildeter Gegenstand wurde ein Dia einer Radierung einer uns unbekanntes historischen Person gewählt, da dieses viele Feinheiten aufwies, die beim Scharfstellen von Nutzen waren. Insbesondere versuchten wir, nach Möglichkeit immer denselben Punkt am Auge scharf zu stellen. Um die in der Vorbereitung erklärten sphärische und chromatische Aberration möglichst gut zu korrigieren, nahmen wir mehrere Messreihen auf. Zunächst wurde eine Lochblende, die das äußere Linsengebiet abdeckte, zusammen mit einem für rotes Licht durchlässigen Farbfilter verwendet. Beide scharfen Positionen wurden je viermal unabhängig voneinander bestimmt (wie bei allen folgenden Messungen in diesem Teilversuch). Anschließend wurden noch die Kombinationen Lochblende/Blaulicht und Scheibenblende/Blaulicht verwendet. Zuletzt verwendeten wir die Kombination aus Rotfilter und Scheibenblende, da die Intensität bei Einsatz des Blaufilters insbesondere bei der kleinen Abbildung sehr gering wurde und es uns mit der Scheibenblende leichter als mit der Lochblende fiel, das Bild scharfzustellen. Mit dieser subjektiv besten Kombination versuchten wir, die verschiedenen Fälle für die Lösung der quadratischen Gleichung 2 aus der Vorbereitung experimentell zu finden. Dafür schoben wir das Dia näher als die bisher etwa gemessene Brennweite von ca. 15cm auf 56cm an den Schirm heran. In diesem Abstand war es nicht möglich, eine Einstellung der Linse zu finden, bei der ein scharfes Bild auf dem Schirm abgebildet wurde. Bei $(59,4 \pm 0,2)\text{cm}$ konnte genau eine derartige Einstellung gefunden werden, wobei diese Messung nicht sehr genau war, da sowohl Linse als auch Dia verschoben werden mussten und die Schärfe nicht genau genug beurteilt werden konnte. Bei größeren Abständen waren dann wie oben beschrieben je zwei zu einem scharfen Bild führende Einstellungen möglich, wobei eine zu einer vergrößerten, die andere zu einer verkleinerten Abbildung führte. Mit steigendem Abstand des Dias vom Schirm wurde die größere Abbildung immer größer, die kleinere jedoch immer kleiner, bis es schließlich bei mehr als 70cm quasi unmöglich wurde, die Schärfe des Bilds zu beurteilen, weil es zu klein wurde.

Die einzelnen Messwerte von d sind im Messprotokoll aufgeführt. Tabelle 2 zeigt für die jeweiligen Kombinationen aus Entfernung, Blende und Farbe die Mittelwerte \bar{d} der Messwerte, die damit die

e	Blende	Lichtfarbe	\bar{d}	$\sigma_{\bar{d}}$	$f(e, \bar{d})$	Δf_{stat}	Δf_{syst}
64,0	Loch	Rot	15,6	0,2	15,06	0,03	0,15
	Loch	Blau	17,10	0,08	14,86	0,011	0,15
	Scheibe	Blau	17,83	0,09	14,76	0,013	0,16
64,0			16,83	0,09	14,89	0,011	0,15
59,4	Scheibe	Rot	0,00	-	14,85	-	0,18
61,0			9,40	0,04	14,89	0,003	0,14
70,0			26,93	0,08	14,91	0,014	0,17

Tabelle 2: Brennweitenbestimmung nach Bessel: Auswertung, alle Größen in cm

nach Gl. 3 aus der Vorbereitung berechneten Brennweiten sowie den statistischen Fehler, der aus der Standardabweichung $\sigma_{\bar{d}}$ des Mittelwerts des Abstands gemäß $\Delta f_{\text{stat}} = \left| \frac{\partial f}{\partial d} \right| \sigma_{\bar{d}} = \frac{d}{2e} \sigma_{\bar{d}}$ folgt, sowie den systematischen Fehler. Für den systematischen Fehler wird eine Größtfehlerabschätzung durchgeführt. Die Brennweite hängt von den beiden Größen d und e ab. Der Fehler des Abstands des Dias vom Schirm ergibt sich aus der ungenauen Bestimmung der Position des Schirms, die oben schon angesprochen wurde, sowie der nur ungenau bestimmbar Position des Dias. Diese addieren sich zu $\Delta e \approx 5\text{mm}$. Die Position der Linse konnte ebenfalls nur im Rahmen der Skala bestimmt mit einem Fehler von $\Delta d \approx 1,5\text{mm}$ bestimmt werden. Nach Gl. 16 gilt damit für den systematischen Fehler unter Verwendung der Formel 3 aus der Vorbereitung:

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial e} \right| \Delta e + \left| \frac{\partial f}{\partial d} \right| \Delta d = \frac{e^2 + d^2}{4e^2} \Delta e + \frac{1}{2} \frac{d}{e} \Delta d \quad (18)$$

Mit Tabelle 2 kann das erwartete Verhalten bestätigt werden: für blaues Licht sind die Brennweiten kleiner als für rotes, bei Brechung an der Mitte der Linse mittels einer Lochblende größer als bei Brechung am äußeren Bereich der Linse mittels einer Scheibenblende. Bei Variation des Abstands des Dias vom Schirm ändern sich die Ergebnisse für die Brennweite kaum, wenn man von der ungenauen Einzelmessung der Position, an der es nur ein scharfes Bild gibt, absieht. Außer bei der Kombination Scheibenblende/Blaulicht, bei der es aufgrund der niedrigen Intensität des Lichts sehr schwer war, die Schärfe des Bildes genau zu bestimmen, liegt der angegebene Wert der Brennweite der Linse von $f = 15\text{cm}$ immer im Rahmen des Fehlerbereichs, wobei der systematische Fehler aufgrund der vielen ungenauen Messungen immer um mindestens eine Größenordnung über dem statistischen liegt. Allerdings fällt nun deutlich ins Auge, dass der in Abschnitt 3.1.1 bestimmte Wert für die Brennweite, der deutlich zu groß war, jetzt wesentlich genauer und präziser bestimmt werden konnte. Offenbar wurden dort also grobe systematische Fehler begangen, die nicht berücksichtigt wurden.

3.1.3 Messung nach dem Abbe-Verfahren

Mit dem gegebenen Zweilinsensystem wurde ein in Zehntelmillimeter unterteiltes, insgesamt 1cm langes Dia auf dem Schirm abgebildet. Dabei wurde als Marke die Mitte des Zweilinsensystems in Abstand zum Dia gewählt, diese variiert und der Schirm jeweils so justiert, dass das Dia scharf abgebildet wurde. Über das auf dem Schirm angebrachte Millimeterpapier wurde direkt die Vergrößerung β gemessen. Es wurden drei Messreihen aufgenommen, wobei jedes Mal das Zweilinsensystem jeweils in beiden Richtungen eingesetzt wurde. Die Messung der Vergrößerung war mit gewissen Schwierigkeiten verbunden, insbesondere bei der Einstellung des Systems, das in beide

Richtungen gut vergrößern sollte, da die Vergrößerung bei Werte nahe bei 1 schlecht abzulesen war. Nur eine Einstellung erfüllte diese Bedingungen gut, die beiden andern vergrößerten leidlich, aber andere Einstellungen waren noch schlechter.

Zur Auswertung wurde eine andere Formel als in der Vorbereitung angegeben verwendet, die zum Zwecke der Fehlerrechnung günstiger ist. Die dort angegebene Gleichung 5 lässt sich umformen zu $x = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) f + l$. Daraus können bei Auftragung des Abstands x von Dia zu Marke über $1 + \frac{1}{\beta}$ die Brennweite und der Abstand l der Marke zur Hauptebene direkt aus Steigung und Achsenabschnitt einer Regressionsgeraden abgelesen werden, insbesondere sind die Fehler Δf und Δl direkt aus der Standardabweichung dieser beiden statistischen Größen ohne weitere Fehlerfortpflanzung bestimmt. Abbildung 1 zeigt die so aufgetragenen drei Messreihen, es wurden absichtlich dieselben Skalen auf der x -Achse gewählt. Die aus den linearen Regressionen erhaltenen Werte der Steigung, des Achsenabschnitts und deren Fehler sind in Tabelle 3 dargestellt. Außerdem sind dort die damit berechneten Werte für den Abstand d der beiden Hauptebenen, dessen Fehler und für jede Messreihe die gemittelte Brennweite aufgeführt (eigentlich sollten beide Brennweiten gleich sein, was sie aber aufgrund der ungenauen Messungen nicht sind). Zur Bestimmung der beiden

	$m_{\text{Regr}} \equiv f$	$y_0 \equiv l$ [cm]	$\Delta m \equiv \Delta f$	$\Delta y_0 \equiv \Delta l$	d	Δd	\bar{f}
1. Messreihe	6,8	1,3	0,4	0,7	2,5	1,6	7,3
1. Messreihe umgedreht	7,9	1,2	0,6	0,9			
2. Messreihe	11,0	-4,6	0,5	0,8	7,9	2,1	11,0
2. Messreihe umgedreht	11,1	-3,3	0,9	1,3			
3. Messreihe	11,5	-5,5	1,0	1,6	7,0	3,1	10,5
3. Messreihe umgedreht	9,5	-1,5	0,9	1,4			

Tabelle 3: Brennweitenbestimmung nach Abbe: Auswertung der Messreihen (alle Größen in cm)

Brennweiten der verwendeten Linsen wird wie in Vorbereitung beschrieben d über $\frac{1}{f}$ aufgetragen. Die beiden Brennweiten können dann nach Gl. 7 der Vorbereitung aus der Steigung m und dem Achsenabschnitt c der Regressionsgeraden berechnet werden. Mit Gnuplot wurden die Werte $m = -0,0091 \pm 0,0003\text{cm}^{-2}$ und $c = 0.163 \pm 0.002\text{cm}^{-1}$ ermittelt. Wenn man diese Werte jedoch einsetzt, erhält man die unphysikalischen, da komplexen Brennweiten $8,92 \pm i5,46\text{cm}$. Berücksichtigt man für eine Fehlerberechnung nur die statistischen Fehler Δm und Δc aus der letzten Regression ohne Fortpflanzung vorheriger systematischer und statistischer Fehler, so gilt nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta f_{1/2} = \sqrt{\left|\frac{\partial f_{1/2}}{\partial m}\right|^2 (\Delta m)^2 + \left|\frac{\partial f_{1/2}}{\partial c}\right|^2 (\Delta c)^2} \quad (19)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{c}{2m^2} \mp \frac{c^2 + 2m}{2m\sqrt{c^2m^2 + 4m^3}}\right)^2 (\Delta m)^2 + \left(\frac{-1}{2m} \pm \frac{c}{2\sqrt{c^2m^2 + 4m^3}}\right)^2 (\Delta c)^2} \quad (20)$$

Allerdings ergeben sich wieder komplexe Werte (die Ausdrücke unter den Wurzeln im Nenner sind jeweils negativ), daher wird auf einen Wert des Fehlers hier verzichtet, obwohl es durch die Beträge prinzipiell möglich wäre.

Insgesamt ist das Verfahren in der durchgeführten Form sehr fehleranfällig. Das beginnt bei der Messung des Abstands der Marke vom Objekt, der einen systematischen Fehler aufweist. Die Messung der Vergrößerung ist auch nicht sonderlich genau, daher ebenfalls mit einem systematischen

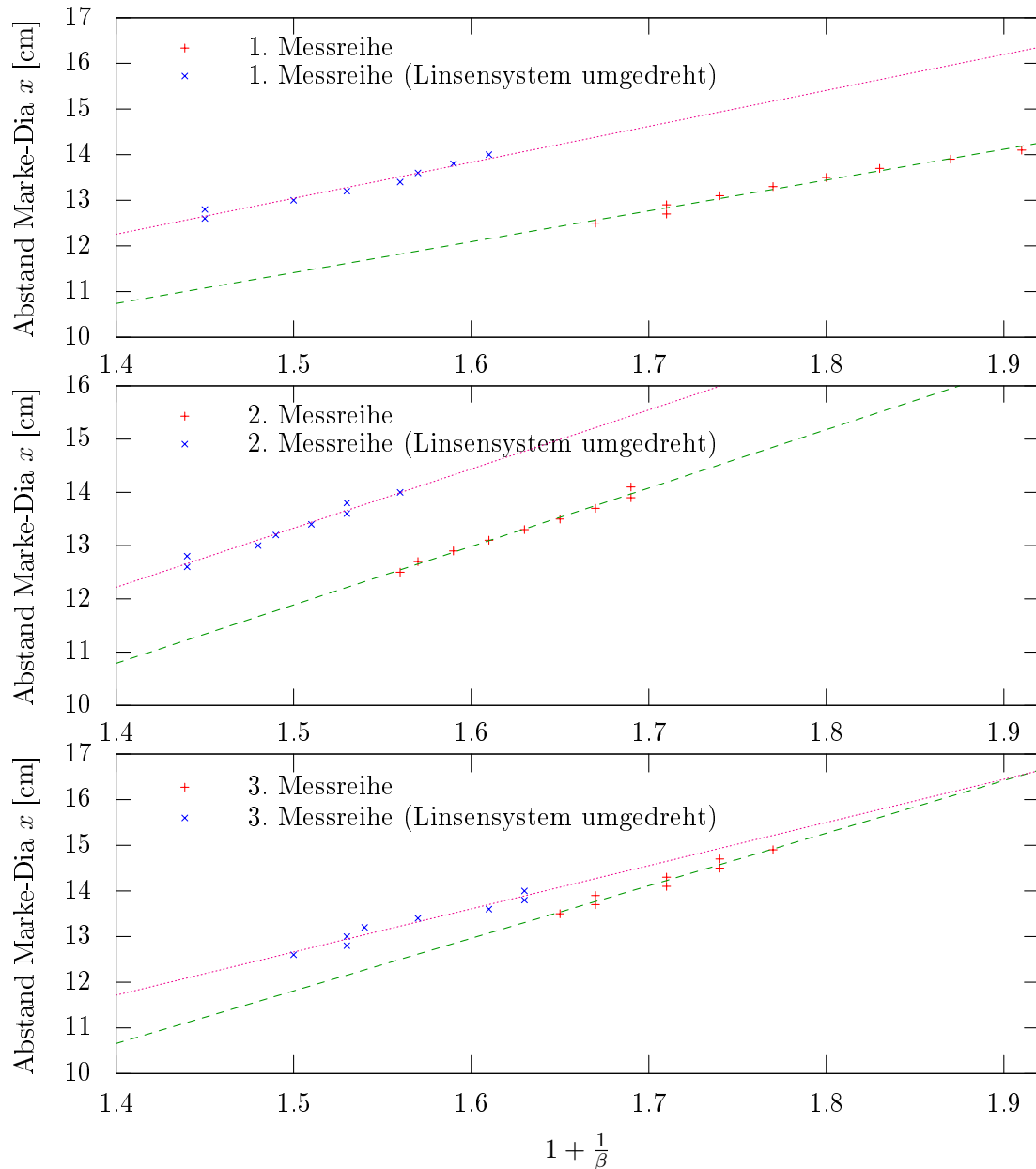


Abbildung 1: Brennweitenbestimmung nach Abbe: Messreihen mit linearer Regression

Fehler behaftet. Beide müssten eigentlich als Fehlerbalken bei der linearen Regression für die Bestimmung der Gesamtbrennweite des Zweilinsensystems und dem Abstand von den Hauptebenen eingehen (darauf wurde hier verzichtet). In unserer Messung ergab dabei das Problem, dass die Geraden für das Zweilinsensystem in beiden Richtung z.T. nicht einmal annähernd parallel waren (s. Abb. 1). Daher wurde die Brennweite gemittelt, wobei dafür eigentlich viel mehr Messungen notwendig gewesen wären. Aufgrund der Regression ergibt sich ein statistischer Fehler der Brennweite und des Abstands der Marke von der Hauptebene. Aus diesen Größen wird der Abstand der Hauptebenen zueinander berechnet, wobei dessen Fehler wiederum vom statistischen Fehler aus der Regression abhängt. Für jede Messreihe ist dieser anders, was zur letzten Auftragung in Abb.

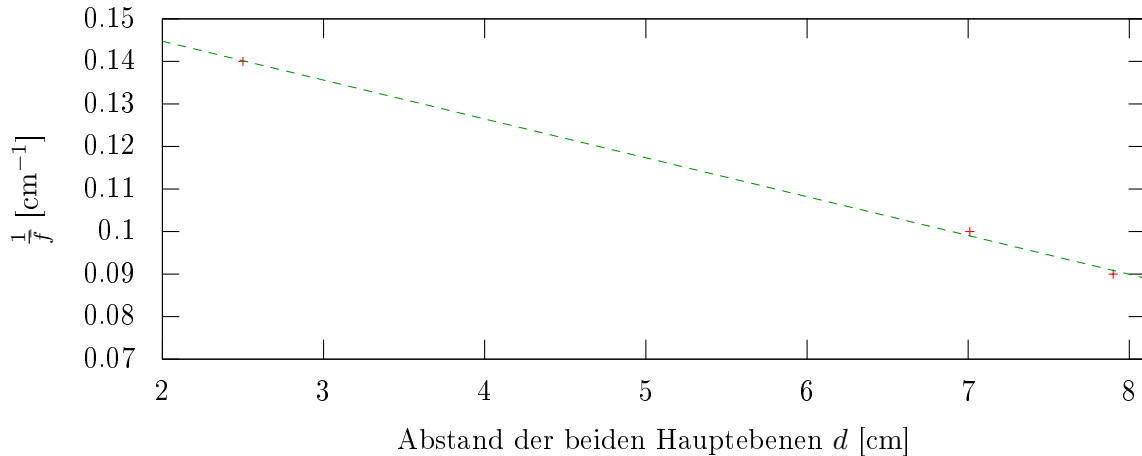


Abbildung 2: Brennweitenbestimmung nach Abbe: Zweite Auftragung mit linearer Regression

2 führt. Auch dabei wären mehr als drei Messreihen nötig, um die Regression besser durchführen zu können. Insgesamt haben sich bis dahin offenbar alle Fehler derart akkumuliert, dass die aus dieser Auftragung gewonnenen Werte für die einzelnen Brennweiten völlig falsch und sogar unphysikalische, komplexe Größen sind.

3.2 Aufbau optischer Instrumente

3.2.1 Fernrohre

Mit einer 7cm-Sammellinse als Okular und einer 50cm-Sammellinse als Objektiv bauten wir zunächst ein Keplersches Fernrohr auf einer optischen Bank auf, sodass der Abstand beider Linsen 57cm betrug. Rechnerisch ergibt sich damit eine 7,1-fache Vergrößerung. Die an der gegenüberliegenden Wand angebrachte Skala konnte damit vergrößert und auf dem Kopf stehend beobachtet werden. Gemessen wurde die Vergrößerung lediglich mit einem höchst unzureichenden und dazu kopfwehverursachenden Verfahren, indem ein Lineal neben das Fernrohr gehalten wurde und dieselbe Strecke auf dem Lineal nach Möglichkeit durch das Fernrohr und ohne Fernrohr auf der entfernten Skala markiert wurde. Da sich das Lineal wie auch das Fernrohr etwa in 10cm Abstand zum Auge befanden, war das Fokussieren extrem schwer und die Messung äußerst ungenau. Auch war die Position des Lineals sowie des Kopfes nur sehr ungefähr gleich.

Die auf diese Weise bestimmten Vergrößerungen betragen 4,1 und 4. Diese Werte liegen erstaunlich nah beisammen, wenn man die restlichen Unzulänglichkeiten beim Messen bedenkt, jedoch sind sie weit von der berechneten Vergrößerung entfernt. Möglicherweise war auch der Abstand zum beobachteten Objekt, das sich ja in wenigen Metern Abstand an der gegenüberliegenden Wand befand, noch zu klein, um die Vergrößerung des Fernrohrs vernünftig messen zu können.

Mit derselben Sammellinse wie vorher, jetzt jedoch einer 5cm-Zerstreuungslinse im Abstand von 45cm bauten wir anschließend ein Galilei-Fernrohr auf. Rechnerisch ergibt sich daraus eine 10fache Vergrößerung. Auch hier betrachteten wir wieder die Skala, jetzt stand das Bild wie erwartet nicht auf dem Kopf. Mit demselben ungenauen Verfahren versuchten wir, die Vergrößerung zu messen. Dabei erhielten wir die Werte 2,2 und 2,84. Diese entsprechen noch weniger den erwarteten Werten wie beim Keplerschen Fernrohr. Das mag einerseits an steigender Müdigkeit der Experimentatoren liegen, andererseits wieder am verwendeten Messverfahren. Jedoch liegt auch hier der Verdacht nahe, dass das Objekt möglicherweise zu nahe am Fernrohr stand.

Systematische Fehler bei den Messungen sind neben der Schwankung des Kopfs und des Lineals auch die nicht völlig exakte Platzierung der Linsen auf der Bank, deren Fehler in der Brennweite, ihre Aberrationen sowie die Fehler der Skala des Lineals und der an der Wand.

3.2.2 Diaprojektor

Zunächst wurde die ungenaue Angabe aus der Vorbereitung, aus der sich nicht ergab, ob sich der Abstand vom Schirm auf das projizierte Dia oder die Linse bezog, geklärt: offenbar war der Gegenstand gemeint. Damit ist der in der Vorbereitung berechnete Wert für die Brennweite der Linse falsch. Jedoch stand sowie keine Linse der richtigen Brennweite bereit, weshalb wir eine 10cm-Linse benutzten, um ein 11cm entferntes Dia auf den 110cm entfernten Schirm zu projizieren. Wir verwendeten wieder das Dia mit dem cm-Raster, um die Vergrößerung direkt ablesen zu können. Rechnerisch betrug sie 10fach, wir maßen 10,1fach. Im Gegensatz zum Fernrohr stand hier eine brauchbare Messmethode zur Verfügung und das gemessene Ergebnis stimmt recht gut mit dem berechneten überein. Mögliche Fehlerquellen sind auch hier die ungenaue Positionierung von Dia, Linse und Schirm, das auf dem Schirm aufgeklebte, von diesem aber abstehende Millimeterpapier, Linsenfehler sowie die etwas abschätzende Messung der Größe des projizierten Bildes. Außerdem haben wir nicht überprüft, ob die auf dem Dia befindliche Skala wirklich einen cm-Abstand war.

3.2.3 Mikroskop

Mit einer 5cm-Linse als Objektiv und einer 7cm-Linse als Okular bauten wir durch wiederholtes Verschieben beider Linsen ein Mikroskop auf. Die beiden Linsen befanden sich schließlich im Abstand $t = 57\text{cm}$. Mit einer angenommen minimalen Entfernung von $s_0 = 25\text{cm}$ ist damit die rechnerische Vergrößerung ca. 36fach. Gemessen wurde die Vergrößerung in einem ähnlichen Verfahren wie bei den Fernrohren, indem das Millimeterpapier betrachtet wurde und mit einem Lineal dieselbe Strecke mit und ohne Mikroskop auf dem Millimeterpapier betrachtet wurde. So ergab sich eine etwa 80fache Vergrößerung. Diese liegt deutlich über der berechneten, was einerseits wieder am ungenaueren Messverfahren liegen kann, andererseits treten natürlich auch wieder Linsenfehler und Ablesefehler auf. Schließlich ist die Sehkraft jedes Menschen anders (auch wenn es eigentlich widersinnig ist, dass mit einem kleineren s_0 , wenn man also nähere Objekte scharf sehen kann, die Vergrößerung sinkt) und wir haben sie nicht individuell gemessen.