

Physikalisches Anfängerpraktikum (P1)

P1-31,40,41: Geometrische Optik

Matthias Ernst (Gruppe Mo-24)

Karlsruhe, 18.1.2010

Ziel des Versuchs ist die Beschäftigung mit der geometrischen Optik.

1 Bestimmung von Brennweiten

1.1 Kontrolle der angegebenen Brennweite einer dünnen Sammellinse

Eine Sammellinse bündelt parallel einfallendes Licht im Brennpunkt. Die einfachste Methode zur Kontrolle der Brennweite einer Linse besteht also darin, parallel einfallendes Licht wie das Sonnenlicht mit einer Sammellinse zu auf einem Schirm so zu bündeln, dass es in einem Punkt abgebildet wird. Steht der Schirm parallel zur Linsenebene, so kann der Abstand des Schirms von der Linsenebene gemessen werden, dies ist dann direkt die Brennweite.

1.2 Brennweitenbestimmung nach dem Besselschen Verfahren und chromatische Aberration

Ein besseres Verfahren zur Bestimmung der Brennweite einer Linse, das ohne Kenntnis der Linsenebene auskommt, geht auf Bessel zurück. Für die scharfe Abbildung eines Gegenstands im Abstand g („Gegenstandsweite“) von einer dünnen Linse mit Brennweite f auf einem im Abstand b („Bildweite“) zur Linse aufgestellten Schirm gilt die Linsengleichung:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad (1)$$

Bezeichnet man nun den Abstand zwischen Objekt und Bild mit e , so folgen aus $g = e - b$ nach Einsetzen in die Linsengleichung, Umformen, Auflösen nach b und Lösen der dabei resultierenden quadratischen Gleichung zwei mögliche Positionen des Bildes:

$$b_{1,2} = \frac{e}{2} \pm \sqrt{e \left(\frac{e}{4} - f \right)} \quad (2)$$

Dies bedeutet, dass der Abstand des Objekts zu dessen Abbildung größer als die vierfache Brennweite der Linse sein muss, also $e > 4f$, damit diese Abbildung überhaupt möglich ist. Außerdem folgt, dass es zwei Positionen gibt, an denen das Bild scharf abgebildet werden kann. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass für $b > g$ eine Vergrößerung resultiert, ist aus der Gleichung

schließlich ersichtlich, dass eine dieser beiden Abbildungen das Objekt vergrößert, während es die andere verkleinert darstellt. Aus dem Abstand $d = |b_1 - b_2| = \sqrt{e^2 - 4f}$ der beiden Positionen der scharfen Abbildungen lässt sich die Brennweite der Linse bestimmen gemäß

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e}. \quad (3)$$

Auf dieselbe Weise und nach völlig analoger Rechnung lässt sich die Brennweite auch aus dem Abstand $d' = |g_1 - g_2|$ der beiden Positionen des Gegenstands (statt wie oben des Bildes) in beiden Positionen, die zu einer scharfen Abbildung führen, bestimmen. Experimentell müssen für einen festgelegten Abstand e von Objekt und Bild die Positionen gefunden werden, bei denen das Objekt scharf abgebildet wird, daraus kann gemäß Gleichung 3 die Brennweite berechnet werden. Allerdings sollte e nicht sehr viel größer als $4f$ werden, da ansonsten das verkleinerte Bild sehr klein wird, was die Bestimmung, wann es scharf ist, erschwert.

Die Bestimmung der Brennweite wird allerdings durch Abbildungsfehler der Linse erschwert, von denen hier die sphärische und die chromatische Aberration untersucht werden. Die *sphärische Aberration* liegt darin begründet, dass Linsen in der Regel aufgrund des einfacheren und billigen Herstellungsprozesses kugelförmig, also sphärisch geschliffen werden. Dies bewirkt jedoch, dass parallel auf verschiedenen Stellen der Linse einfallende Strahlen nicht, wie sonst angenommen, alle durch den Brennpunkt gebrochen werden, vielmehr nimmt die Brennweite von der zentralen Achse der Linse nach außen hin ab. Das Objekt wird daher unscharf abgebildet. Die *chromatische Aberration* resultiert aus der Dispersion des Linsenmediums, also der Frequenzabhängigkeit des Brechungsindices. Daher hängt auch die Brennweite von der Frequenz des einfallenden Lichtes ab, insbesondere wird blaues Licht stärker gebrochen als rotes, was zu „Farbsäumen“ an Kanten des Bildes führt.

Um diese beiden Arten von Bildfehlern zu untersuchen, wird die oben beschriebene Bestimmung der Brennweite jeweils mehrfach für rotes und blaues Licht (mittels Farbfiltergläsern) sowie für das innere und äußere Linsengebiet (mittels Loch- und Scheibenblenden) durchgeführt.

1.3 Bestimmung der Brennweite eines Zweilinsensystems nach dem Abbeschen Verfahren

Für ein Zweilinsensystem können die Brennweite des Gesamtsystems sowie der einzelnen Linsen nach dem Abbeschen Verfahren bestimmt werden, auch wenn Gegenstands- und Bildweite bzw. die Lage der Hauptebenen nicht bekannt sind. Vielmehr definiert man bestimmte „Marken“, deren Abstand x zum abgebildeten Gegenstand gemessen werden kann. Wieder ist der Ausgangspunkt die oben gezeigte Linsengleichung, wobei nun der Abbildungsmaßstab $\beta = \frac{b}{g} = \frac{B}{G}$ mit Bildgröße B und Gegenstandsgröße G verwendet wird. Durch Umformen lässt sich der Kehrwert des Abbildungsverhältnisses schreiben als

$$\frac{1}{\beta} = \frac{g}{f} - 1 \quad (4)$$

Verwendet man nun die Position der oben eingeführten Marke, die sich im (noch unbekanntem) Abstand l zur Hauptebene zwischen dieser und dem Gegenstand befindet, also $x = g + l$ bzw. $g = x - l$, so erhält man eine Geradengleichung in x :

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{f}x - \frac{l}{f} - 1 \quad (5)$$

Durch Setzen mehrerer Marken, Messen des Abstands x zum abgebildeten Gegenstand sowie der Vergrößerung des Gegenstands kann also durch Auftragung der inversen Vergrößerung über diesem

Abstand aus der Steigung einer Regressionsgeraden die Brennweite des gesamten Linsensystems bestimmt werden, der Abstand l zur Hauptebene aus deren Achsenabschnitt. Durch Messung „auf der anderen Seite“ des Zweilinsensystems, also nach Drehung um 180° , kann auch der Abstand l' der Marke zur zweiten Hauptebene bestimmt werden. Der Abstand der beiden Hauptebenen ist dann $d = l + l'$. Für die Gesamtbrennweite des Systems gilt

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{f_1 f_2} d + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (6)$$

Auch dies ist die Gleichung einer Geraden, nun in d . Durch Variation des Abstands d der beiden Linsen und jeweils Messung der Brennweite des Systems lassen sich also mittels abermaliger linearer Regression die einzelnen Brennweiten f_1 und f_2 bestimmen. Die Regressionsgerade hat die Steigung $m = -\frac{1}{f_1 f_2}$ und den Achsenabschnitt $c = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$. Die Brennweiten der einzelnen Linsen ergeben sich dann zu

$$f_{1/2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 + \frac{1}{m}} \quad (7)$$

2 Aufbau optischer Instrumente

2.1 Keplersches und Galileisches Fernrohr

Das *Keplersche Fernrohr* besteht aus zwei Sammellinsen unterschiedlicher Brennweite. Die Linse mit deutlich größerer Brennweite bildet das sog. Objektiv (das bei anderen Arten von Fernrohren auch aus mehreren optischen Elementen auf kompliziertere Weise aufgebaut sein kann), die Linse kleinerer Brennweite das Okular. Das Objektiv erzeugt ein reelles Bild des weit entfernten Gegenstands, das durch das Okular gleichsam wie durch eine Lupe betrachtet wird. Die Anordnung muss also dergestalt erfolgen, dass die Brennebenen beider Linsen zur Deckung kommen. Aus dem Strahlengang resultiert ein im Vergleich zum abgebildeten Objekt um 180° gedrehtes Bild. Für die Vergrößerung gilt

$$\Gamma_{\text{Kepler}} = \frac{f_{\text{Objektiv}}}{f_{\text{Okular}}} \quad (8)$$

Um wie in der Aufgabenstellung gefordert ein Fernrohr mit sechsfacher Vergrößerung zu erhalten, muss also die Brennweite der als Objektiv eingesetzten Linse sechsmal so groß wie die des Okulars sein. Die Vergrößerung des Fernglases lässt sich durch Erhöhung der Brennweiten einer oder beider Linsen vergrößern, dabei verlängert sich auch das gesamte Fernrohr.

Beim Galileischen Fernrohr wird als Objektiv wie beim Kepler-Fernrohr eine Sammellinse, als Okular aber eine Zerstreuungslinse verwendet. Auch hier kommen die Brennebenen zur Deckung, allerdings liegt die der Zerstreuungslinse nicht mehr zwischen dieser und der Sammellinse, sondern von der Sammellinse aus gesehen hinter der Zerstreuungslinse. Dadurch ist das Galileische Fernrohr insgesamt kürzer und das Bild erscheint nicht „auf dem Kopf“.

2.2 Diaprojektor

Für den Bau eines einfachen Diaprojektors ist neben dem Diapositiv und einer entsprechenden Halterung und einer Lichtquelle ein Kondensor, also eine Sammellinse, nötig, der die einfallenden Strahlen parallel parallel auf das Dia leitet sowie dafür sorgt, dass es gleichmäßig ausgeleuchtet wird sowie eine Sammellinse, durch die die einfallenden (parallelen) Strahlen auf einen Schirm treffen und dort ein vergrößertes, aber um 180° gedrehtes scharfes Bild des Diapositivs darstellen.

Im Versuch soll ein Diapositiv der Größe $24\text{mm} \times 36\text{mm}$ in einem Abstand von $1,5\text{m}$ mit zehnfacher Vergrößerung dargestellt werden, also $\frac{B}{G} = \frac{b}{g} = 10$, wobei $b = 1,5\text{m}$. Aus der Linsengleichung kann damit die benötigte Brennweite der Linse berechnet werden, sie beträgt $f \approx 13,6\text{cm}$.

2.3 Mikroskop

Einem Mikroskop liegt ein ähnliches Prinzip zugrunde wie einem Fernrohr, es besteht im einfachsten Fall ebenfalls aus zwei Sammellinsen unterschiedlicher Brennweite. Im Unterschied zum Fernrohr wird jedoch ein dem Objektiv sehr nahes Objekt, das sich fast im Brennpunkt der Objektivlinse befindet, abgebildet. Das Objektiv erzeugt ein reelles und bereits vergrößertes Bild, das durch das Okular nochmals wie durch eine Lupe betrachtet wird. Das Okular ist daher so angeordnet, dass das Zwischenbild in dessen Brennebene zu liegen kommt. Auf diese Weise kann der Beobachter ein virtuelles, nochmals deutlich vergrößertes, auf dem Kopf stehendes Bild des Objekts sehen.

Die Vergrößerung des gesamten Mikroskop setzt sich nach $\Gamma = V_{\text{Objektiv}}V_{\text{Okular}}$ aus der Vergrößerung des Objektivs und des Okulars zusammen. Da das abgebildete Objekt sehr nahe an der Brennebene der Objektivlinse befindet, ist $g \approx f_{\text{Objektiv}}$. Der Tubus zwischen den beiden Linsen hat die Länge t , das Zwischenbild befindet sich im Abstand $b = t - f_{\text{Okular}}$ zur Objektivlinse. Somit ist die Vergrößerung des Objektivs

$$V_{\text{Objektiv}} = \frac{b}{g} = \frac{t - f_{\text{Okular}}}{f_{\text{Objektiv}}} \quad (9)$$

Die Vergrößerung des Okulars hängt von der minimalen Entfernung s_0 ab, in der das Auge das virtuelle Bild scharf ansehen kann, sie beträgt damit

$$V_{\text{Okular}} = \frac{s_0}{f_{\text{Okular}}} \quad (10)$$

Die gesamte Vergrößerung des Mikroskops ist also

$$\Gamma = \frac{(t - f_{\text{Okular}})s_0}{f_{\text{Objektiv}}f_{\text{Okular}}} \quad (11)$$

Prinzipiell ließe sich also die Vergrößerung durch den Einsatz entsprechend kleiner Brennweite immer weiter verbessern. Dies versagt jedoch einerseits aufgrund der numerischen Apertur des Geräts, andererseits kommt ab einer bestimmten Kleinheit des Objekts die Wellennatur des Lichts zum Tragen. Demnach muss das abgebildete Objekt größer als die halbe Wellenlänge des verwendeten Lichts sein, um es noch auflösen zu können (ansonsten kommt es zu Interferenzeffekten).