Physikalisches Anfängerpraktikum (P1)

P1-12,22,22: Resonanz

Versuchsvorbereitung vonMatthias Ernst (Gruppe Mo-24)

Karlsruhe, 23.11.2009

Gegenstand des Versuchs ist die Untersuchung von erzwungener und gedämpfter Schwingung an einem mechanischen System und einem Schwingkreis.

0 Theoretische Grundlagen

0.1 Schwingungen

Bei freien, ungedämpften Schwingungen ist die rücktreibende Kraft F proportional zur Auslenkung x z.B. einer Feder mit Federkonstante D, an deren Ende die Masse m schwingt. Mit dem Hookeschen Gesetz $F = -Dx$ ergibt sich die Schwingungsdifferentialgleichung im ungedämpften Fall mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$:

$$\ddot{x} + \frac{D}{m}x = \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1}$$

Gelöst wird diese durch eine komplexe Expontentialfunktion $x = x_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}$.

In der Praxis sind Schwingungen jedoch meist aufgrund von Verlusten durch Reibung gedämpft. Der einfachste Ansatz hierfür ist die Stokessche Reibung: bei kleinen Geschwindigkeiten ist die Reibung proportional zur Geschwindigkeit, also $F_\mathrm{R} = -R\dot{x}$. Die Schwingungsdifferentialgleichung im gedämpften Fall ist damit:

$$\ddot{x} + \frac{R}{m}\dot{x} + \frac{D}{m}x = 0 \tag{2}$$

Hier wird als Lösunganansatz die zunächst reelle Exponentialfunktion $x = x_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$ gewählt. Als Lösung der charakteristischen Gleichung findet man mit der Abkürzung $\delta = -\frac{R}{2m}$:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2m}\right)^2 - \frac{D}{m}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \tag{3}$$

Nun werden drei Grenzfälle unterschieden:

- $\delta < \omega_0$ (Schwingfall)
  Es handelt sich um schwache Dämpung, der Radikand wird negativ. Folglich ergibt sich

mit $\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ eine komplexe Exponentialfunktion mit der allgemeinen Lösung für die Schwindungsgleichung:

$$x = x_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t + \varphi} \tag{4}$$

Die Schwingung wird durch den Realteil der komplexen Exponentialfunktion beschrieben, der reelle exponentielle Term gibt das Abklingen aufgrund der Dämpfung an.

- $\delta = \omega_0$ (aperiodischer Grenzfall)
  Bei dieser mittleren Dämpfung verschwindet die Wurzel, das System beginnt damit nicht zu schwingen. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

  $$x = x_0(1 + \delta t)\mathrm{e}^{-\delta t} \tag{5}$$

  Physikalisch ist dies der Fall, bei dem das System einmal „ausschlägt“ und dann schnellstmöglich exponentiell in die Ruhelage zurückkehrt.

- $\delta > \omega_0$ (Kriechfall)
  In diesem Fall, bei starker Dämpfung, ist die Wurzel positiv, somit ist die Lösung eine langsam abklingende reelle Exponentialfunktion:

  $$x = x_0 \mathrm{e}^{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \tag{6}$$

  Schwingung tritt nicht auf, das System bewegt sich allmählich auf die Ruhelage zu.

0.2 Pohlsches Drehpendel

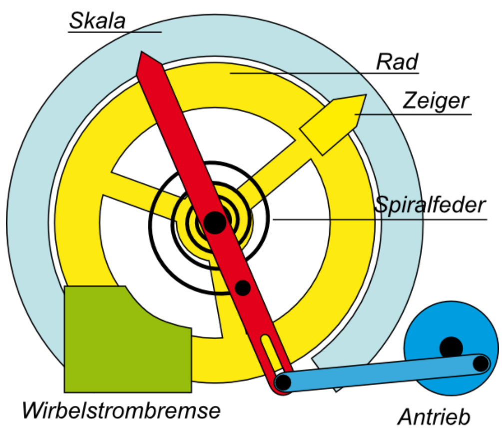

Abbildung 1: Schematischer Aufbau des Pohlschen Drehpendels

Beim Pohlschen Drehpendel handelt es sich um einen Versuchsaufbau zur Untersuchung von Drehschwingungen, schematisch in Abb. 1 dargestellt. Es besteht im Wesentlichen aus einem drehbar gelagerten Pendelkörper in Form eines Rades, der mit einer Spiralfeder in der Ruhelage gehalten wird. Mittels einer Skala kann die Auslenkung bestimmt werden. Das Rad kann außerdem über einen Erreger angetrieben oder über eine Wirbelstrombremse verlangsamt werden, dies ermöglicht die Untersuchung erzwungener oder gedämpfter Schwingungen. Mittels eines zusätzlichen Massestücks kann auch eine chaotische Bewegung hervorgerufen werden, dies ist im vorliegenden Versuch jedoch nicht von Relevanz.

1 Durchführung

Obwohl aus der Versuchsvorschrift nicht der zu verwendende Aufbau hervorgeht, ist aufgrund der Vorbereitungsmaterialien anzunehmen, dass die Versuche 1 bis 4 an einem Pohlschen Rad durchzuführen sind. Überhaupt verwendet die Vorschrift etliche Größen, ohne anzugeben, was sie bedeuten (z.B.Φ).

1.1 „Freie“ Schwingung des Drehpendels

Mithilfe der Software CASSY wird die freie Schwingung des Drehpendels untersucht. Dabei werden Phasenwinkel und -geschwindigkeit aufgenommen.

In der Auswertung sind der zeitliche Verlauf der beiden gemessenen Größen und deren Phasenraumdarstellung sowie den Verlauf der kinetischen Energie darzustellen. Für diese gilt:

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi} \tag{7}$$

Das Trägheitsmoment Θ des Drehpendels ist im Wesentlichen das des homogenen kupfernen Pendelkörpers. Dieser hat die Form eines Hohlzylinders. Für das Trägheitsmoment gilt damit:

$$\Theta = \int\limits_M r^2\,\mathrm{d}m = \rho\int\limits_V r^2\,\mathrm{d}V = \rho\int\limits_0^d \mathrm{d}z\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{a}} r^3\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\pi d\rho[r_\mathrm{a}^4 - r_\mathrm{i}^4] \approx 1,402\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{8}$$

Wegen der Reibungsverluste im Pendel wird die beobachtete Schwingung leicht gedämpft sein, die Amplitude sollte exponentiell abnehmen.

1.2 Gedämpfte Schwingung des Drehpendels

Die Wirbelstrombremse wird mit $\mathrm{I_B}$=100,200,400,700mA betrieben und mit CASSY der Winkel φ in Abhängigkeit der Zeit aufgenommen. Aus der grafischen Auftragung soll die Dämpfungskonstante bestimmt werden. Außerdem soll diese nach einer der in der Vorbereitung angegebenen Formeln, $k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_{i-1}}{\varphi_i}$ oder $k = \sqrt[n]{\frac{\varphi_0}{\varphi_n}}$ berechnet werden. Die erste dürfte den statistischen Fehler minimieren, die zweite ist weniger aufwändig, was aber bei einer EDV-gestützten Auswertung nicht ins Gewicht fällt. Schließlich soll die Güte des Systems bestimmt werden, diese berechnet sich laut Vorbereitung gemäß $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$.

1.3 Bestimmung der Winkelrichtgröße der Schneckenfeder des Drehpendels

Wirkt eine konstante Kraft tangential zum Rad, so wirkt ein Drehmoment und es stellt sich schließlich ein Kräftegleichgewicht bei messbarer Auslenkung ein. Es gilt: $|\mathbf{r}\times\mathbf{F}| = D^*\varphi_\mathrm{F}$, die Winkelrichtgröße kann also gemäß $D^* = \frac{r\cdot F}{\varphi_\mathrm{F}}$ bei Kenntnis des Angriffspunkts der Kraft sowie deren Wert berechnet werden (praktischerweise offenbart die Versuchsvorschrift die Präsenz eines Federkraftmessers...). Analog zum oben diskutierten Fall für lineare Schwingungen gilt nun auch für das Trägheitsmoment $\omega_0^2 = \frac{D^*}{\Theta}$, dies ermöglicht mit $\omega_0 = \frac{T}{2\pi}$ und der Periodendauer T die abermalige Bestimmung des Trägheitsmoments nach der Formel

$$\Theta = \frac{D^* T^2}{4\pi^2} \tag{9}$$

1.4 Erzwungene Schwingung des Drehpendels

Mittels des Antriebs ist bei I_B=200,400mA die jeweilige Resonanzkurve aufzunehmen. Wieder soll die Güte des Systems bestimmt werden.

1.5 Erzwungene Schwingung des Schwingkreises

Am gegebenen Schwingkreis sollen mit verschiedenen Widerständen (vermutlich beim R=5Ω und R=20Ω, die Versuchsvorschrift verweist auf die Vorbereitungshilfe, dort sind jedoch keine Werte explizit angegeben, sondern nur bei den genannten Werten beispielhafte Kurven dargestellt) Resonanzkurven aufgenommen werden.

Anhang

1.6 Quellenangaben

Die folgenden Grafiken wurden nicht selbst erstellt:

- Abbildung 1: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/1237 (abgerufen am 21.11.2009)