

Physikalisches Anfängerpraktikum (P1)

P1-53,54,55: Vierpole und Leitungen

Matthias Ernst (Gruppe Mo-24)

Ziel des Versuchs ist die Durchführung mehrerer Messungen an einem bzw. mehreren Vierpolen (Drosselkette) und einem Koaxialkabel, um die Übertragungseigenschaften des Kabels, insbesondere des Spannungsverlaufs, zu untersuchen.

1 Durchführung

1.1 Messungen am einfachen Vierpol

Als Vierpol wird ein elektrisches Bauteil bezeichnet, das über vier Klemmen, also ein Eingangs- und ein Ausgangsklemmenpaar verfügt. Zunächst wird ein Vierpole bestehend aus einem Widerstand und einem Kondensator untersucht (R-C-Spannungsteiler).

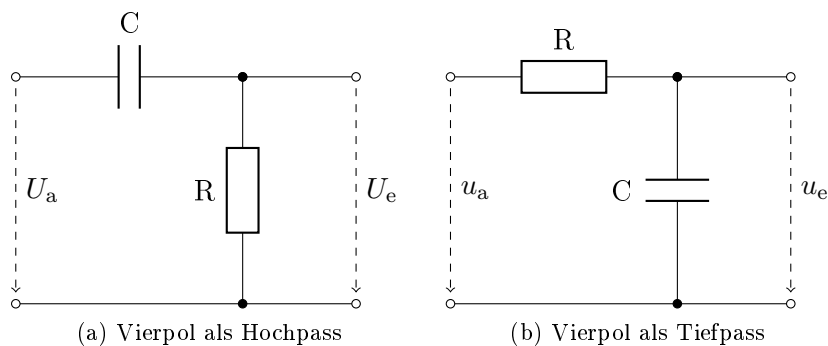


Abbildung 1: RC-Glieder als Beispiele für Vierpole

1.1.1 Messung als Hochpass

An der Reihenschaltung eines Widerstands und eines Kondensators wird sinusförmige Wechselspannung mit der Amplitude (Spitze-zu-Spitze-Eingangsspannung) $U_e \approx 8V_{ss}$ und der Frequenz $f \approx 1,7 \text{ kHz}$ angelegt. Durch oszilloskopische Messung der Ausgangsspannung U_a am Widerstand, der von $1\text{k}\Omega$ über $10\text{k}\Omega$ und $100\text{k}\Omega$ bis $1000\text{k}\Omega$ variiert wird, wird so die Eigenschaft des Vierpols als Hochpass untersucht (zur Anordnung siehe Abb. 1a). Dabei werden jeweils sowohl der Betrag als auch die zeitliche Verschiebung der Phase der Ausgangsspannung gemessen. Bei

diesen Messungen wird der Tastkopf verwendet, da aufgrund dessen großen Widerstands der Messfehler aufgrund der Messung klein ist. Die Benutzung eines Zweikanaloszilloskops erlaubt, die Ausgangsspannung und die Eingangsspannung gleichzeitig zu beobachten.

Für die Ausgangsspannung gilt:

$$U_a = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} U_e. \quad (1)$$

Damit folgt für das Übertragungsverhalten $|U_a|/|U_e|$

$$\frac{|U_a|}{|U_e|} = \frac{\omega CR}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega CR}\right)^2}}, \quad (2)$$

was sich unter Verwendung von $f = \omega/2\pi$ sowie der Grenzfrequenz $f_0 = 1/2\pi RC$, der Frequenz, bei der gerade $U_a/U_e = 1/\sqrt{2}$ gilt, umformen lässt zu

$$\frac{|U_a|}{|U_e|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_0}{f}\right)^2}}. \quad (3)$$

Für die Phasenverschiebung gilt

$$\tan \varphi = \frac{1}{\omega RC}, \quad (4)$$

was wieder unter Verwendung der Grenzfrequenz $f_0 = 1/2\pi RC$ in Abhängigkeit von f_0/f ausgedrückt werden kann als

$$\varphi = \arctan \frac{f_0}{f}. \quad (5)$$

Da die Phasenverschiebung zunächst als zeitliche Differenz Δt der aufeinanderfolgenden Wellenberge gemessen wird, muss sie noch ins Gradmaß umgerechnet werden. Dies erfolgt unter Kenntnis der Kreisfrequenz ω der Wechselspannung und mit Verwendung des Zusammenhangs zwischen der Frequenz und der Periodendauer $f = 1/T$ nach

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T} = \Delta t \cdot f \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = 2\pi f \cdot \Delta t = 360^\circ \cdot f \Delta t \quad (6)$$

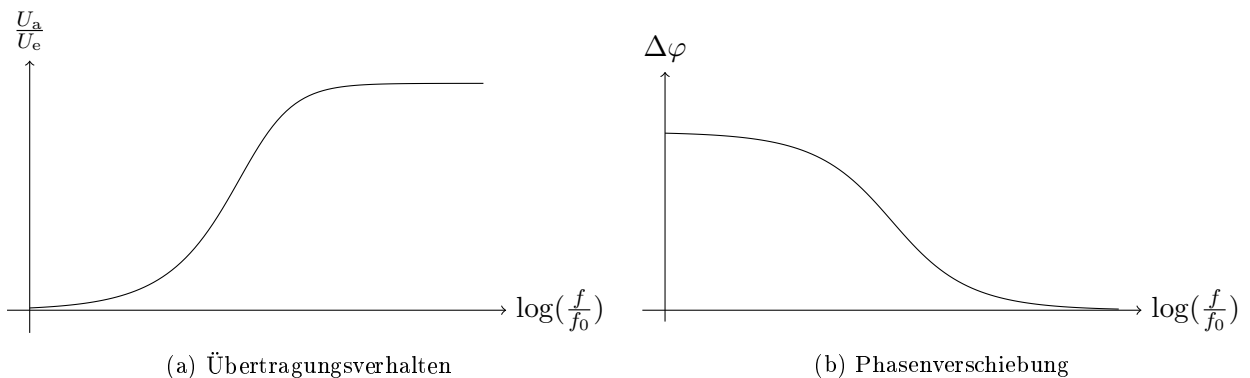


Abbildung 2: Übertragungsverhalten und Phasenverschiebung des Hochpasses, berechnet

1.1.2 Messung als Tiefpass

Es werden dieselben Messungen wie beim Hochpass, jedoch am Kondensator statt am Widerstand, durchgeführt, der Vierpol also als Hochpass untersucht. Für die Ausgangsspannung gilt dann

$$|U_a| = \frac{1}{1 + i\omega CR} |U_e|, \quad (7)$$

was in Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses f_0/f geschrieben werden kann als

$$\frac{|U_a|}{|U_e|} = \frac{1}{\left(1 + \frac{f}{f_0}\right)^2}. \quad (8)$$

Analog gilt wegen $\tan \varphi = -\omega RC$ nun für die Phasenverschiebung

$$\varphi = -\arctan \frac{f}{f_0}. \quad (9)$$

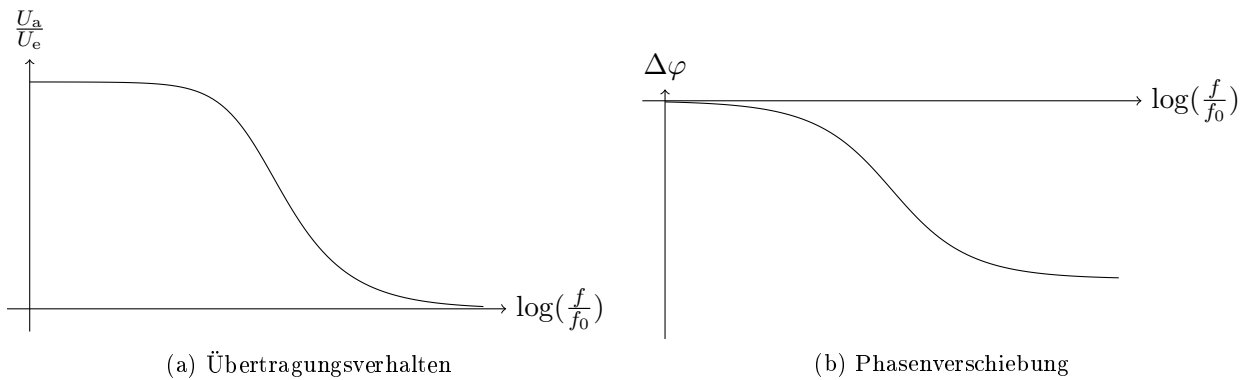


Abbildung 3: Übertragungsverhalten und Phasenverschiebung des Tiefpasses, berechnet

1.1.3 Andere Arten von Spannung (Dreiecksspannung, Rechteckspannung) und Variationen

Bei Frequenzen, die deutlich kleiner als die Grenzfrequenz sind, wird das Eingangssignal von einem Hoch- bzw. Tiefpass in charakteristischer Weise verformt.

Beim Hochpass gilt

$$U_a = RC \cdot \frac{dU_e}{dt} \quad (10)$$

Die Ausgangsspannung ist also proportional zur Eingangsspannung, weshalb der Hochpass im entsprechenden Frequenzbereich auch als Differenzglied bezeichnet wird. Hingegen gilt für den Tiefpass:

$$U_a = \frac{1}{RC} \int dt [U_e - U_a] \quad (11)$$

Hier ist die Ausgangsspannung also proportional zur Differenz aus Eingangsspannung und Ausgangsspannung, daher wird der Tiefpass auch Integrierglied genannt.

Messungen am Hochpass als Differenzierglied: Dreiecksspannung

Es wird dreiecksförmige Wechselspannung mit der Frequenz 1,7kHz und der Amplitude $U_e \approx 8V_{ss}$ an den Hochpass angelegt. Mit dem Tastkopf wird die Ausgangsspannung gemessen. Erwartet wird ein idealerweise rechteckiger Verlauf, da die Differenziation der auf- und der absteigenden Flanke der eingehenden Dreiecksspannung jeweils konstante Werte für die Ausgangsspannung ergibt.

Messungen am Tiefpass als Integrierglied: Rechtecksspannung

Am Tiefpass wird jetzt Rechtecksspannung angelegt, sonst wird wie beim Hochpass verfahren. Hier wird das umgekehrte ideale Verhalten wie beim Hochpass erwartet, dass also die Rechtecksspannung in eine Dreiecksspannung transformiert wird.

Weitere Messungen

Das Verhalten von Hoch- und Tiefpass wird über einen weiten Frequenzbereich untersucht. Außerdem werden der Hochpass mit Rechteck- und der Tiefpass mit Dreiecksspannung gemessen.

1.2 Messungen an einer Reihe von Vierpolen (Drosselkette)

Nun wird eine Reihe mehrerer Vierpole untersucht, die sogenannte Drosselkette. Dabei handelt es sich um eine Reihenschaltung aus Blindwiderständen (hier aus Spulen und Kondensatoren in Abb. 4 dargestellt). Für die folgenden Messungen wird eine sechsgliedrige Drosselkette verwendet.

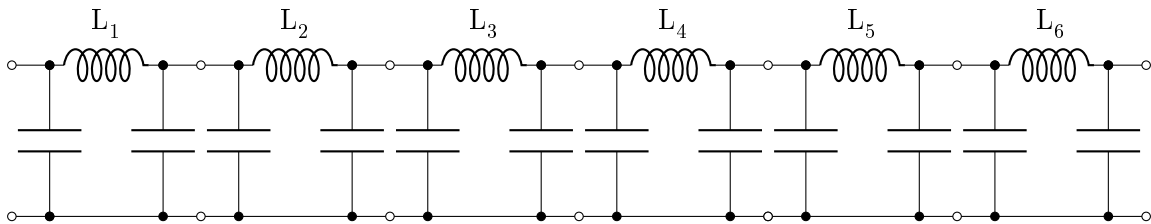


Abbildung 4: Sechsgliedrige Drosselkette

1.2.1 Bestimmung des charakteristischen Widerstands

Es wird rechteckige Wechselspannung der Frequenz 20kHz und der Amplitude $U_e \approx 6V_{ss}$ an die Drosselkette angelegt. Ein regelbarer Abschlusswiderstand Z_a am Ende der Kette wird so eingestellt, dass möglichst wenig Reflexionen des Signals auftreten. Dieser Wert entspricht dem charakteristischen Widerstand Z_0 .

1.2.2 Bestimmung der Grenzfrequenz

Die Grenzfrequenz hat den theoretischen Wert

$$f_0 = \frac{1}{\pi\sqrt{LC}} \quad (12)$$

Für die Frequenzabhängigkeit des charakteristischen Widerstands gilt damit

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{f}{f_0}}} \quad (13)$$

Für kleine Frequenzen $f \ll f_0$ ist also

$$Z_0^{(0)} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (14)$$

Zur Messung der charakteristischen Frequenz wird sinusförmige Wechselspannung zunächst kleiner Frequenz, die später bis 1MHz erhöht wird und der Amplitude $U_e \approx 6V_{ss}$ angelegt. Der Abschlusswiderstand wird zunächst auf $Z_0^{(0)}$ eingestellt, muss jedoch zur Vermeidung von Reflexionen bei Erhöhung der Frequenz nachjustiert werden. Die Grenzfrequenz ist der Punkt, an dem sich die Ausgangsspannung erheblich ändert, wenn die Frequenz variiert wird.

1.2.3 Berechnung der Daten der Bauelemente der Drosselkette

Aus Gl. 12 und 14 folgt für die Induktivität der Spulen in jedem Element der Drosselkette

$$L = \frac{Z_0}{\pi f_0} \quad (15)$$

und für die Kapazität jedes Kondensatorpaares

$$C = \frac{1}{\pi f_0 Z_0}. \quad (16)$$

Diese Werte können mit den angegebenen Werten der Bauteile verglichen werden.

1.2.4 Bestimmung der Phasenverschiebung in Abhängigkeit von der Frequenz

Zur Bestimmung der Phasenverschiebung werden an ein Glied und die sechsgliedrige Kette sinusförmige Wechselspannung der in Tab. 1 angegebenen Frequenzen angelegt, wobei die Kette immer möglichst reflexionsfrei gehalten wird.

Frequenz in kHz	10	100	300	500	600	650	690
-----------------	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Tabelle 1: Frequenzen für die Bestimmung der Phasenverschiebung der Drosselkette

Die Phasenverschiebung wird als Zeitdifferenz gemessen. Daher wird sie nach $\Delta\varphi = 2\pi f$ in einen Winkel umgerechnet. Dieser steigt linear mit der Anzahl der Glieder in der Kette an, was ebenfalls gemessen werden soll. Außerdem gilt für die Phasenverschiebung der mehrgliedrigen Drosselkette die Beziehung

$$\Delta\varphi = 2n \arcsin \frac{f}{f_0} \quad (17)$$

Daraus kann nochmals die Grenzfrequenz bestimmt werden, indem die Frequenzen bestimmt werden, bei denen die Phasenverschiebungen ganzzahlige Vielfache von π beträgt. Dann gilt nach Gl. 17

$$f_0 = \frac{f}{\sin \frac{k\pi}{2n}} \quad (18)$$

1.2.5 Kurzschluss der Drosselkette

Die Drosselkette wird am Ende kurzgeschlossen ($Z_a=0$ eingestellt) und somit Reflexionen erzwungen. Reflexionen am Anfang werden durch einen hohen Widerstand $R=200\Omega$ zwischen dem Generator und der Kette unterdrückt. Es wird rechteckförmige Eingangsspannung der Frequenz 20kHz angelegt und die Signalform am Kettenanfang beobachtet. Zu erwarten ist die Überlagerung der rechteckförmigen Eingangsspannung mit der phasenverschobenen und amplitudenreduzierten Reflexion.

1.3 Messungen am Koaxialkabel

Im letzten Versuchsteil wird der Übergang von der endlichen Drosselkette als inhomogenen Leiter zum homogenen Leiter vollzogen. Die Messungen werden daher an einem Koaxialkabel durchgeführt, welches als dispersionsfrei angenommen wird. Somit gilt für die theoretische Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}. \quad (19)$$

1.3.1 Bestimmung des charakteristischen Widerstands

Die Messung wird wie in Abschnitt 1.2.1 durchgeführt, es wird aber rechteckförmige Wechselspannung der Frequenz 1,1MHz an das Koaxialkabel angelegt.

1.3.2 Bestimmung der Verzögerungszeit

Wie in 1.2.4 wird Rechteckspannung angelegt und am Oszilloskop die Zeitdifferenz zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung gemessen. Für diese Verzögerungszeit τ' gilt die Beziehung

$$\tau' = \frac{\Delta t}{l}. \quad (20)$$

Weiterhin ist die Verzögerungszeit wie in Abschnitt 1.2.5 aus der Phasenverschiebung des Generator- und des reflektierten Signals bei kurzgeschlossenem Kabel und unter Anlegen einer Rechteckspannung der Frequenz 1MHz zu bestimmen. Aufgrund der Reflexion gilt nun

$$\tau' = \frac{\Delta t}{2l}. \quad (21)$$

1.3.3 Bestimmung der Dielektrizitätskonstante des Kabels

Zuletzt werden aus den verschiedenen Messungen und den geometrischen Daten des Kabels, dem Innenradius r_i und dem Außenradius r_a die Dielektrizitätskonstante des Kabels auf mehrere Weisen berechnet. Dabei gelten die Beziehungen

$$\epsilon_r(C_1, r_i, r_a) = \frac{C_1}{2\pi\epsilon_0 l} \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right), \quad (22)$$

$$\epsilon_r(\tau') = \frac{c^2 \tau'^2}{\mu_r} \quad (23)$$

und

$$\epsilon_r(Z_0^{(0)}, r_i, r_a) = \frac{c^2 \mu_0^2 \mu_r}{4\pi Z_0^2} \ln^2\left(\frac{r_a}{r_i}\right). \quad (24)$$