

Physikalisches Anfängerpraktikum (P2)

P2-74: Kreisel

Vorbereitung

Matthias Ernst
Matthias Faulhaber

Durchführung: 11.11.2009

1 Drehimpulserhaltung

Mithilfe eines Drehschemels und eines Radkreisels führten wir verschiedene Versuche durch:

- Zunächst haben wir, auf dem Schemel sitzend, den Kreisel (mit vertikaler Drehachse) in Rotation versetzt. Dabei begannen wir, uns, wie erwartet, um uns selbst zu drehen.
- Überreichten wir der Person auf dem Schemel einen bereits rotierenden Kreisel, so versetzte der Drehimpuls dieses Kreisels den Schemel in eine Drehbewegung. Beim Absenken des Kreisels, sodass seine Drehachse horizontal ausgerichtet war, kam der Schemel wieder zur Ruhe. Dies zeigt, dass der Drehimpuls auf dem Schemel nur in z-Richtung erhalten ist.
- Zuletzt setzten wir uns noch auf den Schemel und streckten unsere Arme aus, während wir uns drehten. Durch das größere Trägheitsmoment verlangsamte sich unsere Bewegung. Zogen wir die Arme an den Körper zurück, so beschleunigte sie sich aufgrund des erhaltenen Drehimpulses wieder.

Dieser Versuch zeigt sehr schön, dass die Drehimpulserhaltung gilt.

2 Freie Achsen

In diesem Versuch haben wir die Rotation einer "Zigarrenkiste" um ihre Hauptachsen untersucht. Wir beobachteten:

- Bei der Rotation um das größte Trägheitsmoment beobachteten wir ein sehr stabiles Verhalten der Kiste. Eingebachte Störungen klangen exponentiell ab.
- Die Rotation um das mittlere Trägheitsmoment war extrem instabil. Allein durch die Störung, die der nicht ideale Draht einbrachte, kippte die Kiste zur Seite und drehte sich um ihr größtes Trägheitsmoment.
- Die Rotation um das kleinste Trägheitsmoment der Kiste war wieder relativ stabil. Bei kleineren Störungen begann sie, um die Gleichgewichtslage zu schwingen. Die Störung klang jedoch nicht ab, da sie vom leicht gebogenen Draht stetig auf die Kiste ausgeübt wurde.

3 Kräftefreier Kreisel

In diesem Versuch untersuchten wir einen kräftefreien Kreisel. Wir haben zunächst die Nutation ohne Zusatzgewichte gemessen. Dabei gilt:

$$\omega_N = \frac{\Theta_3}{\sqrt{\Theta_1 \cdot \Theta_2}} \cdot \omega \quad (1)$$

Tragen wir nun die gemessenen Winkelgeschwindigkeiten der Nutation über denen der Rotation auf, so ergibt sich folgendes Diagramm:

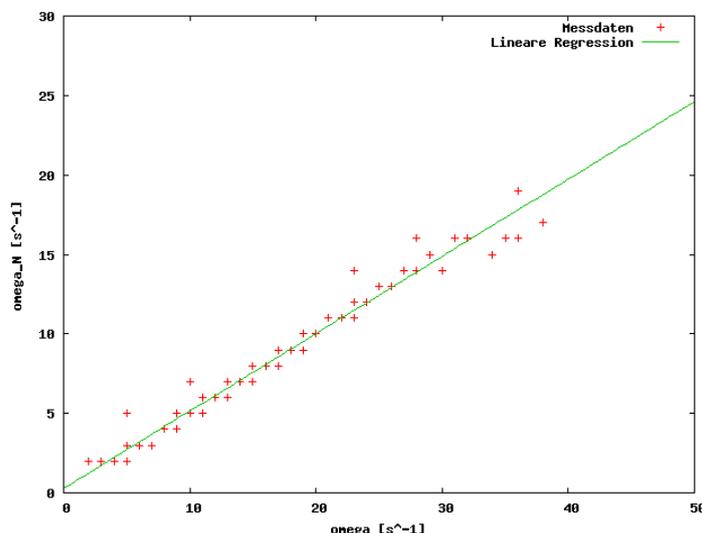


Abbildung 1: ω_N in Abhängigkeit von ω ; ohne Zusatzgewichte

Mit der linearen Regression erhalten wir für die Regressionsgerade $\omega_{N,Reg} = a_{ohne} \cdot \omega_{Reg} + c_{ohne}$ die Werte:

$$\begin{aligned} a_{ohne} &= 0,486466 \pm 0,008640 \quad \hat{=} \quad 1,776075\% \\ c_{ohne} &= 0,275348 \pm 0,159900 \text{ s}^{-1} \quad \hat{=} \quad 58,071967\% \end{aligned}$$

Die meisten unserer Messwerte liegen sehr schön auf der Regressionsgeraden. Die wenigen ‘Ausreißer’ sind wahrscheinlich auf die Messapparatur zurückzuführen. Unser Messgerät für die Winkelgeschwindigkeit gab alle 0,5 Sekunden einen Mittelwert der gemessenen Impulse aus. Registrierte es mehrere Impulse zu wenig, so entstand dadurch ein klar sichtbarer Fehler. Wir entschlossen uns jedoch, die grob abweichenden Messwerte trotzdem in unserer Regression zu berücksichtigen. Zum Einen hat dies den Grund, dass es sein könnte, dass einzelne Fehler nicht aus der vermuteten Fehlerquelle kommen. Zum Anderen verfälschen uns die wenigen abweichenden Messpunkte kaum die Regression, da sie sich zum Teil gegenseitig eliminieren und insgesamt sehr viel weniger sind, als die Menge der Messpunkte, die sich nahe der Regressionsgeraden befinden.

Nun haben wir zwei zylinderförmige Massen an den äußeren Kardanrahmen angebracht. Beide haben eine Masse von je $m_{Zyl} = 1024 \pm 1 \text{ g}$ und einen Durchmesser von $d_{Zyl} = 4,00 \pm 0,01 \text{ cm}$. Der äußere Kardanrahmen hat einen Radius von $r_{Ka} = 14,9 \pm 0,1 \text{ cm}$.

Mithilfe des Steinerschen Satzes können wir nun das auf die x-Achse zusätzlich wirkende Trägheitsmoment Θ_{Zus} berechnen zu:

$$\Theta_{Zus} = \underbrace{2}_{2 \text{ Zylinder}} \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{2} m_{Zyl} \left(\frac{d_{Zyl}}{2} \right)^2}_{\Theta_{Zylinder}} + \underbrace{m_{Zyl} \left(r_{Ka} + \frac{d_{Zyl}}{2} \right)^2}_{\text{Steinerscher Satz}} \right) = \frac{3}{4} m_{Zyl} \cdot d_{Zyl}^2 + 2 m_{Zyl} (r_{Ka} \cdot d_{Zyl} + r_{Ka}^2) \quad (2)$$

$$\Theta_{Zus} = 0,0589025 \text{ kg m}^2$$

Mithilfe der Größtfehlerabschätzung erhalten wir den systematischen Fehler:

$$\begin{aligned}\sigma_{\Theta_{Zus}}^{sys} &= \left| \frac{\partial \Theta_{Zus}}{\partial r_{Ka}} \right| \cdot \sigma_{r_{Ka}}^{sys} + \left| \frac{\partial \Theta_{Zus}}{\partial d_{Zyl}} \right| \cdot \sigma_{d_{Zyl}}^{sys} + \left| \frac{\partial \Theta_{Zus}}{\partial m_{Zyl}} \right| \cdot \sigma_{m_{Zyl}}^{sys} \\ \sigma_{\Theta_{Zus}}^{sys} &= \begin{aligned} & \left| 2m_{Zyl} \cdot (d_{Zyl} + 2r_{Ka}) \right| \cdot \sigma_{r_{Ka}}^{sys} \\ & + \left| 2m_{Zyl} \cdot \left(r_{Ka} + \frac{3}{4}d_{Zyl} \right) \right| \cdot \sigma_{d_{Zyl}}^{sys} \\ & + \left| \frac{3}{4}d_{Zyl}^2 + 2r_{Ka}d_{Zyl} + 2r_{Ka}^2 \right| \cdot \sigma_{m_{Zyl}}^{sys} \end{aligned} \\ \sigma_{\Theta_{Zus}}^{sys} &= \mathbf{0,0007864 \text{ kg m}^2} \quad \hat{=} \mathbf{1,3350958\%}\end{aligned}\tag{3}$$

$$\Theta_{Zus} = \mathbf{0,0589025 \pm 0,0007864 \text{ kg m}^2}$$

Auch mit den Zusatzgewichten haben wir wieder die Winkelgeschwindigkeiten von Nutation und Rotation gemessen. Dabei gilt nun:

$$\omega_N = \frac{\Theta_3}{\sqrt{(\Theta_1 + \Theta_{Zus}) \cdot \Theta_2}} \cdot \omega\tag{4}$$

Aus den Messwerten ergibt sich folgendes Diagramm:

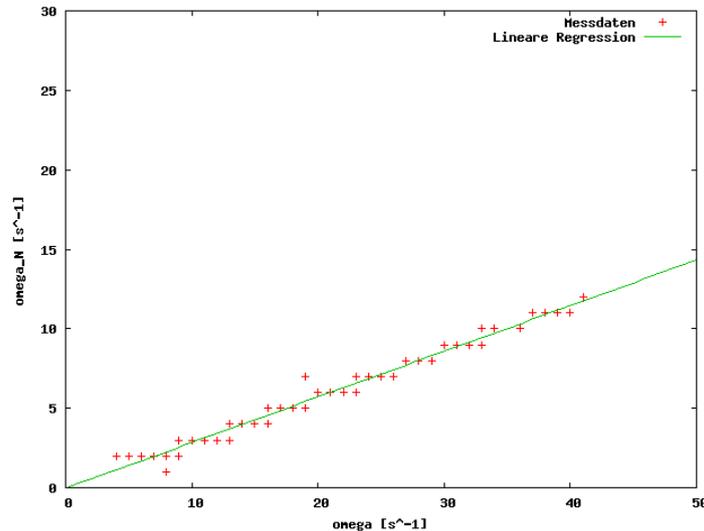


Abbildung 2: ω_N in Abhängigkeit von ω ; mit Zusatzgewichten

Mit der linearen Regression erhalten wir für die Regressionsgerade $\omega_{N,Reg} = a_{mit} \cdot \omega_{Reg} + c_{mit}$ die Werte:

$$\begin{aligned}a_{mit} &= \mathbf{0,287333 \pm 0,005006} \quad \hat{=} \mathbf{1,742229\%} \\ c_{mit} &= \mathbf{-0,038292 \pm 0,111500 \text{ s}^{-1}} \quad \hat{=} \mathbf{291,187339\%}\end{aligned}$$

Auch bei dieser Messung liegen die meisten unserer Werte wieder sehr schön auf der Regressionsgeraden. Mit den abweichenden Messpunkten verfahren wir wie zuvor bei der Messung ohne Zusatzgewichte.

Betrachten wir nun die beiden Steigungen näher. Es bestehen folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}a_{ohne} &= \frac{\Theta_3}{\sqrt{\Theta_1 \cdot \Theta_2}} & a_{mit} &= \frac{\Theta_3}{\sqrt{(\Theta_1 + \Theta_{Zus}) \cdot \Theta_2}} \\ \frac{a_{ohne}^2}{a_{mit}^2} &= \frac{\Theta_1 + \Theta_{Zus}}{\Theta_1} = 1 + \frac{\Theta_{Zus}}{\Theta_1} \Leftrightarrow \Theta_1 = \frac{\Theta_{Zus}}{\left(\frac{a_{ohne}}{a_{mit}}\right)^2 - 1} = \mathbf{0,031560 \text{ kg m}^2}\end{aligned}\tag{5}$$

Mithilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet sich der statistische Fehler zu:

$$\sigma_{\Theta_1}^{\text{stat}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial a_{\text{ohne}}} \cdot \sigma_{a_{\text{ohne}}}^{\text{stat}}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta_1}{\partial a_{\text{mit}}} \cdot \sigma_{a_{\text{mit}}}^{\text{stat}}\right)^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial\Theta_1}{\partial a_{\text{ohne}}} = -\frac{2 \cdot a_{\text{ohne}} \cdot \Theta_{\text{Zus}}}{a_{\text{mit}}^2 \cdot \left(\frac{a_{\text{ohne}}^2}{a_{\text{mit}}^2} - 1\right)} \quad \frac{\partial\Theta_1}{\partial a_{\text{mit}}} = \frac{2 \cdot \Theta_{\text{Zus}} \cdot a_{\text{ohne}}^2}{a_{\text{mit}} \cdot \left(a_{\text{ohne}}^2 - a_{\text{mit}}^2\right)} \quad (7)$$

$$\sigma_{\Theta_1}^{\text{stat}} = 0,020529 \text{ kg m}^2 \quad \hat{=} 65,0\%$$

Θ_{Zus} berechnet sich aus Werten, denen nur systematische Fehler anhängen, während sich a_{ohne} und a_{mit} aus der Steigung von Regressionsgeraden berechnen, denen lediglich statistische Fehler anhaften. Wir wollen trotz ihres sehr geringen Einflusses auch die systematischen Fehler von a_{ohne} und a_{mit} mit in unsere Fehlerrechnung einbeziehen. Deshalb schätzen wir ihren Einfluss auf 1% des Messergebnisses. Dabei orientieren wir uns am systematischen Fehler von Θ_{Zus} . Diese systematischen Fehler sind durch die sehr geringen Fehlaufzeichnungen der Messgeräte entstanden.

Wir berechnen aufgrund dieser Überlegungen den systematischen Fehler $\sigma_{\Theta_1}^{\text{sys}}$ von Θ_1 zu:

$$\left(\frac{\sigma_{\Theta_1}^{\text{sys}}}{\Theta_1}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_{\Theta_{\text{Zus}}}^{\text{sys}}}{\Theta_{\text{Zus}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\left(\frac{a_{\text{ohne}}}{a_{\text{mit}}}\right)^2 - 1}^{\text{sys}}}{\left(\frac{a_{\text{ohne}}}{a_{\text{mit}}}\right)^2 - 1}\right)^2 \quad (8)$$

$$\sigma_{\left(\frac{a_{\text{ohne}}}{a_{\text{mit}}}\right)^2 - 1}^{\text{sys}} = 1\% \cdot \left(\left(\frac{a_{\text{ohne}}}{a_{\text{mit}}}\right)^2 - 1\right) = 0,018664 \text{ kg m}^2$$

$$\sigma_{\Theta_1}^{\text{sys}} = 0,000526 \text{ kg m}^2 \quad \hat{=} 1,7\%$$

$$\Theta_1 = 0,031560 \pm 0,020529 \pm 0,000526 \text{ kg m}^2$$

4 Dämpfung des Kreisels

Bei diesem Versuch maßen wir die Abnahme der Winkelgeschwindigkeit ω des Kreisels in Abhängigkeit von der Zeit. Wir stellten das Messgerät so ein, dass es uns alle 20 Sekunden einen gemittelten Wert von ω ausgab.

Aus der ermittelten Messwerten ergibt sich folgendes Diagramm:

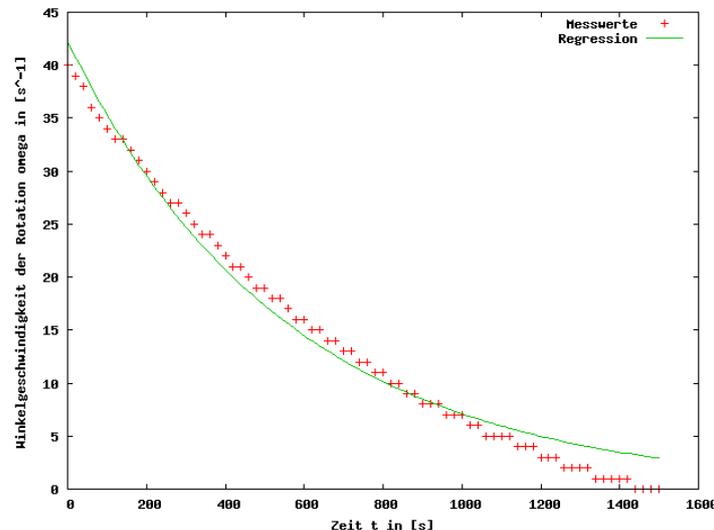


Abbildung 3: Abnahme der Winkelgeschwindigkeit ω in Abhängigkeit von der Zeit t

Wir erwarteten, einen exponentiellen Zusammenhang erkennen zu können. Deshalb ließen wir mithilfe von Gnuplot eine Funktion $f(t) = A \cdot \exp(-\beta t)$ an die Messwerte anfitten und erhielten für den Parameter A und die Dämpfungskonstante β folgende Werte:

$$\begin{aligned} A &= 42,2233 \pm 0,5819 \hat{=} 1,378\% \\ \beta &= 0,0017814 \pm 3,711 \cdot 10^{-5} \hat{=} 2,083\% \end{aligned}$$

5 Kreisel unter dem Einfluss äußerer Drehmomente

In diesem Versuchsteil haben wir auf den Kreisel ein Drehmoment ausgeübt. Dazu befestigten wir am inneren Kardanrahmen einen Stab mit einem verschiebbaren Gewicht. Wir maßen die Winkelgeschwindigkeit ω des Kreisels, sowie die Zeit $t_{\frac{1}{2}}$, die er für einen halben Präzessionsumlauf benötigte. $t_{\frac{1}{2}}$ lässt sich in die Winkelgeschwindigkeit der Präzession ω_P umrechnen zu:

$$\omega_P = \frac{\pi}{t_{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

Wie in der Vorbereitung bereits erwähnt gilt folgender Zusammenhang:

$$\omega_P = \frac{M}{\Theta_3} \quad (10)$$

Mit dem resultierenden Drehmoment M, welches sich aus dem Drehmoment M_S , welches der Stab, und dem Drehmoment M_G , welches das Gewicht auf den Kreisel ausübt, zusammensetzt.

Um M_S und M_G berechnen zu können, benötigen wir noch die folgenden, teils in der Vorbereitungshilfe gegebenen, teils gemessenen Größen:

Beschreibung	Bezeichnung	Messwert	Fehler
Abstand CM_{Kreisel} zu äußerer Rand innerer Kardan	r_{Ki}	10,91 cm	$\pm 0,03$ cm
Abstand Schraubansatz zu CM_{Stab}	d_1	16,0 cm	$\pm 0,1$ cm
Masse Stab	m_S	330 g	± 1 g
Abstand Schraubansatz zu Gewicht	d_2	9,5 cm	$\pm 0,1$ cm
Länge Gewicht	d_3	4,0 cm	$\pm 0,1$ cm
Masse Gewicht	m_G	375 g	± 1 g

Mithilfe dieser Werte berechnen wir nun M_S und M_G :

$$\mathbf{M_S} = (r_{Ki} + d_1) \cdot m_S \cdot g = \mathbf{0,871157 \text{ Nm}} \quad (11)$$

$$\sigma_{\mathbf{M_S}}^{\text{sys}} = m_S g \cdot \sigma_{r_{Ki}} + m_S g \cdot \sigma_{d_1} + (r_{Ki} + d_1) g \cdot \sigma_{m_S} = \mathbf{0,006848 \text{ Nm}} \quad (12)$$

$$\mathbf{M_G} = \left(r_{Ki} + d_2 + \frac{d_3}{2} \right) \cdot m_G \cdot g = \mathbf{0,824408 \text{ Nm}} \quad (13)$$

$$\sigma_{\mathbf{M_G}}^{\text{sys}} = m_G g \cdot \left(\sigma_{r_{Ki}} + \sigma_{d_2} + \frac{1}{2} \sigma_{d_3} \right) + \left(r_{Ki} + d_2 + \frac{d_3}{2} \right) g \cdot \sigma_{m_G} = \mathbf{0,008820 \text{ Nm}} \quad (14)$$

Somit erhalten wir ein insgesamt wirkendes Drehmoment von:

$$\mathbf{M} = \mathbf{1,695565 \pm 0,015669 \text{ Nm}}$$

Wir tragen nun ω_P über ω auf:

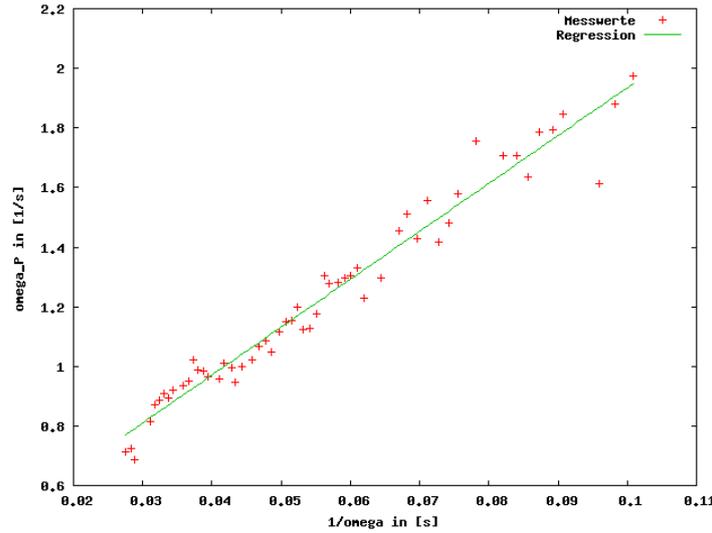


Abbildung 4: ω_P in Abhängigkeit von ω

Für die lineare Regression $w(x) = u \cdot x + v$ gibt uns Gnuplot folgende Werte aus:

$$u = 16,0748 \pm 0,4376 \frac{1}{s^2} \quad v = 0,327689 \pm 0,02607 \frac{1}{s}$$

Wir können damit nun das Trägheitsmoment berechnen zu:

$$\Theta_3 = \frac{M}{u} = 0,105480 \text{ kg m}^2$$

$$\sigma_{\Theta_3}^{\text{stat}} = \frac{\partial \Theta_3}{\partial u} \cdot \sigma_u^{\text{stat}} = \frac{M}{u^2} \cdot \sigma_u^{\text{stat}} = 0,002871 \text{ kg m}^2 \hat{=} 2,722273\% \quad (15)$$

$$\sigma_{\Theta_3}^{\text{sys}} = \frac{\partial \Theta_3}{\partial M} \cdot \sigma_M^{\text{sys}} = \frac{\sigma_M^{\text{sys}}}{u} = 0,000975 \text{ kg m}^2 \hat{=} 0,924089\% \quad (16)$$

$$\Theta_3 = 0,105480 \pm 0,002871 \pm 0,000975 \text{ kg m}^2$$

6 Hautträgheitsmomente

Mithilfe der Ergebnisse aus den vorherigen Aufgaben 3 und 5 lässt sich nun auch Θ_2 bestimmen:

$$a_{\text{ohne}} = \frac{\Theta_3}{\sqrt{\Theta_1 \cdot \Theta_2}} \quad \Leftrightarrow \quad \Theta_2 = \frac{\Theta_3^2}{a_{\text{ohne}}^2 \cdot \Theta_1} \quad (17)$$

$$\Theta_2 = 1,489702 \text{ kg m}^2$$

$$\left(\frac{\sigma_{\Theta_2}^{\text{stat}}}{\Theta_2} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{\sigma_{\Theta_3}^{\text{stat}}}{\Theta_3} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{\sigma_{a_{\text{ohne}}}^{\text{stat}}}{a_{\text{ohne}}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Theta_1}^{\text{stat}}}{\Theta_1} \right)^2 \quad (18)$$

$$\sigma_{\Theta_2}^{\text{stat}} = 0,971431 \text{ kg m}^2 \hat{=} 65,209729\%$$

$$\frac{\sigma_{\Theta_2}^{\text{sys}}}{\Theta_2} = 2 \cdot \frac{\sigma_{\Theta_3}^{\text{sys}}}{\Theta_3} + \frac{\sigma_{\Theta_1}^{\text{sys}}}{\Theta_1} \quad (19)$$

$$\sigma_{\Theta_2}^{\text{sys}} = 0,052382 \text{ kg m}^2 \hat{=} 3,516255\%$$

Zusammenfassung der Ergebnisse:

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \mathbf{0,031560} \pm \mathbf{0,020529} \pm \mathbf{0,000526} \quad \mathbf{kg\ m^2} \\ \Theta_2 &= \mathbf{1,489702} \pm \mathbf{0,971431} \pm \mathbf{0,052382} \quad \mathbf{kg\ m^2} \\ \Theta_3 &= \mathbf{0,105480} \pm \mathbf{0,002871} \pm \mathbf{0,000975} \quad \mathbf{kg\ m^2}\end{aligned}\tag{20}$$

Unsere Messwerte weisen insgesamt nur geringe Fehler auf. Der statistische Fehler von Θ_2 ist allerdings erstaunlich hoch und auch der Wert von $\Theta_2 = 1,489702\text{ kg m}^2$ weicht stark von den beiden anderen Hauptträgheitsmomenten ab. Wir vermuten, dass er durch den hohen Rechenaufwand entstand und dass man ihn bei einer direkteren Messung deutlich besser bestimmen könnte. Der Wert besitzt wenig Aussagekraft und erfüllt nicht annähernd unsere vorherige Erwartung, dass $\Theta_3 > \Theta_2 = \Theta_1$ gilt.

Dass diese Erwartung nicht erfüllt wurde, liegt jedoch auch generell an der Versuchsanordnung mit dem Kardanrahmen, der die Messung der Hauptträgheitsmomente des Kreisels mit seinen eigenen Trägheitsmomenten maßgeblich beeinflusst.

Nun wollen wir noch die Masse des Rotors abschätzen. Wir nehmen ihn dazu als näherungsweise zylindrisch an, sodass für sein Trägheitsmoment bei Rotation um die Symmetrieachse gilt:

$$\Theta_3 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2\tag{21}$$

Mithilfe der Werte $d = 13,50 \pm 0,01\text{ cm}$ vom Aufgabenblatt und $\Theta_3 = 0,105480 \pm 0,002871 \pm 0,000975\text{ kg m}^2$ aus Aufgabe 3 können wir rechnen:

$$m = \frac{8 \cdot \Theta_3}{d^2} = \mathbf{46,301109\text{ kg}}$$

$$\sigma_m^{\text{stat}} = \frac{8}{d^2} \cdot \sigma_{\Theta_3}^{\text{stat}} = \mathbf{1,260443\text{ kg}} \quad \hat{=} \mathbf{2,722273\%}\tag{22}$$

$$\sigma_m^{\text{sys}} = \left| \frac{\partial m}{\partial \Theta_3} \right| \cdot \sigma_{\Theta_3}^{\text{sys}} + \left| \frac{\partial m}{\partial d} \right| \cdot \sigma_d^{\text{sys}} = \frac{8}{d^2} \cdot \sigma_{\Theta_3}^{\text{sys}} + \frac{16 \cdot \Theta_3}{d^3} \cdot \sigma_d^{\text{sys}} = \mathbf{0,496458\text{ kg}} \quad \hat{=} \mathbf{1,072237\%}\tag{23}$$

$$m = \mathbf{46,301109} \quad \pm \mathbf{1,260443} \quad \pm \mathbf{0,496458\text{ kg}}$$

Auch hier entspricht das Ergebnis nicht unseren Erwartungen. Die Masse des Kreisels hätten wir auf maximal 10 kg geschätzt. Offenbar weist auch der von uns ermittelte Wert von Θ_3 einen relativ großen Fehler auf.

7 Kreiselkompass

Zur Demonstration eines Kreiselkompassens befestigten wir als abschließenden Versuch unseren rotierenden Kreisel auf einer schrägen Holzebene, welche auf einer Drehscheibe gelagert war. Arretierten wir die Horizontale Achse des Kreisels und schalteten den Antrieb der Drehscheibe ein, so konnten wir sehr schön beobachten, wie sich unsere Erwartungen bestätigten:

Der Kreisel richtete sich durch das aufgrund der Drehbewegung auf ihn wirkende Drehmoment nach Norden aus.

Bei freier horizontaler Achse blieb die Drehimpulsachse des Kreisels raumfest. Diese Beobachtung ist nun wieder auf die Drehimpulserhaltung zurückzuführen, die wir bereits in Aufgabe 1 ausführlich betrachteten.