Physikalisches Anfängerpraktikum (P2)

P2-74: Kreisel

Vorbereitung

Matthias Ernst
Matthias Faulhaber

Durchführung: 11.11.2009

---

1 Drehimpulserhaltung

In diesem ersten Teil des Versuchs wollen wir mithilfe eines Drehschemels und eines Fahrradkreisels die Drehimpulserhaltung untersuchen.
In einem System ohne äußere Kräfte gilt die Drehimpulserhaltung:

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const. \tag{1}$$

Da der Drehschemel nur Bewegungen um eine Achse zulässt, gilt hier nur die Erhaltung der vertikalen Drehimpulskomponente $L_z = const.$.

Um die Drehimpulserhaltung zu demonstrieren, kann man nun, auf dem Schemel sitzend, den Kreisel mit vertikaler Achse in Rotation versetzen. Dabei wird man beginnen, sich um die eigene Achse zu drehen.

Eine zweite Möglichkeit zur Demonstration ist, der Person auf dem Schemel einen rotierenden Kreisel mit horizontal ausgerichteter Achse in die Hand zu geben. Zunächst erhält man keinen Drehimpuls in z-Richtung. Kippt man den Kreisel jedoch langsam, sodass seine Achse eine vertikale Ausrichtung bekommt, so beginnt man sich wieder zu drehen.

2 Freie Achsen

In diesem Versuch wollen wir nun die Rotation einer SZigarrenkisteüm ihre Hauptachsen untersuchen. Für die Rotation gelten die Euler'schen Gleichungen:

$$M_1 = \Theta_1\dot{\omega}_1 + (\Theta_3 - \Theta_2)\omega_2\omega_3 \tag{2}$$
$$M_2, M_3 \text{ zyklisch} \tag{3}$$

Die Θ_i entsprechen den Hauptträgheitsmomenten um die i-te Achse.

Betrachtetn wir unsere Rotation um eine der Hauptachsen und setzen ein konstantes ω_i in die Eulergleichungen ein, so verschwinden die anderen $\omega_j(i \neq j)$. Mithilfe des Variationsprinzips kann man nun noch die Stabilität des Kreisels untersuchen und erhält:

$$\ddot{\omega}_j + H\omega_j = 0 \tag{4}$$

mit

$$H = \prod_j \left(\frac{\Theta_i - \Theta_j}{\Theta_j}\right)\omega_i^2 \tag{5}$$

Fallunterscheidung:

- $H > 0$: Der Kreisel schwingt harmonisch um die Gleichgewichtslage, die Rotation ist stabil. (Bedingung $H > 0 \mathrel{\widehat{=}} \Theta_i$ ist größtes / kleinstes Trägheitsmom.)
- $H < 0$: Das Trägheitsmoment Θ_i ist nicht das größte oder kleinste. Dadurch ergibt sich ein exponentiell ansteigender Lösungsterm, die Rotation um die i-te Achse ist instabil.

3 Kräftefreier Kreisel

In diesem Versuch untersuchen wir einen kräftefreien Kreisel. Die Kräftefreiheit (Summe der angreifenden Kräfte gleich Null) wird erreicht durch die Aufhängung des Kreisels in seinem Schwerpunkt (mithilfe von Schiebegewichten am Kardanrahmen). Der Kreisel ist symmetrisch, d.h. er ist rotationssymmetrisch um seine Figurenachse. Das bedeutet, dass zwei der drei Hauptträgheitsmomente gleich sind ($\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$).

Zu bestimmen ist nun die Nutationsfrequenz des Kreisels in Abhängigkeit von seiner Rotationsfrequenz. Nutation ergibt sich dadurch, dass die Figurenachse des Kreisels nicht seiner Drehimpulsachse entspricht. Ist dies der Fall, so bewegt sich der Drehimpulsvektor auf einem Kegel (Rastpolkegel), mit einer von der Rotationsfrequenz abhängigen Frequenz:

$$\omega_N = \frac{\Theta_3 \cdot \omega}{\Theta_1^2 \cdot \left(\Theta_3^2 - \Theta_1^2\right) sin(\phi)} \tag{6}$$

Für kleine Öffnungen des Nutationskegels ergibt sich:

$$\omega_N = \frac{\Theta_3}{\Theta} \cdot \omega \tag{7}$$

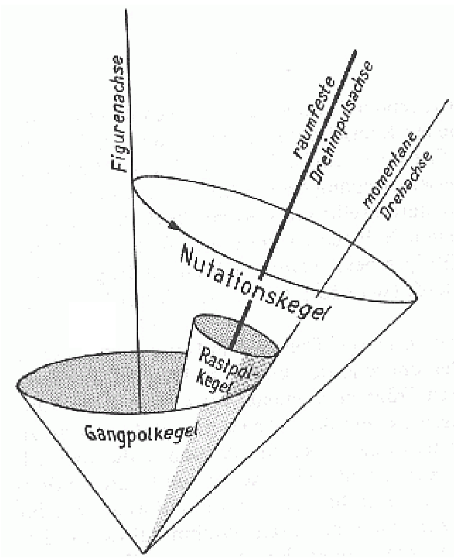

Abbildung 1: Allgemeine Achsen eines Kreisels
Quelle: http://mca.bv.tu-berlin.de/ kerstin/seminararbeit/Images/Kegel.gif [08.11.09]

4 Dämpfung des Kreisels

Nun wollen wir die Winkelgeschwindigkeit der Rotation um die Figurenachse untersuchen. Sie ist abhängig von der Zeit, und wir erwarten, eine exponentielle Abnahme erkennen zu können. In unserer Auswertung können wir dann mithilfe einer Regressionskurve die Dämpfungskonstante d bestimmen. Die Dämpfung ist zurückzuführen auf Reibungseffekte.

5 Kreisel unter dem Einfluss äußerer Drehmomente

In diesem Teilversuch lassen wir auf unseren Kreisel ein Drehmoment $\vec{L}$ wirken. Dazu bringen wir Massen am Lager der Figurenachse an. Es gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} \perp \vec{L} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{8}$$

Betrag des Gesamtdrehimpulses und Drehimpuls in z-Richtung sind erhalten, x- und y-Komponente variieren und der Kreisel präzediert um die z-Achse. Wir wollen nun die die Winkelgeschwindigkeit ω_P der Präzession um die z-Achse in Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz um die Figurenachse bestimmen.

Für die Präzessionsgeschwindigkeit gilt folgender Zusammenhang:

$$\vec{M} = \vec{\omega}_P \times \vec{L} \tag{9}$$

$$M = |\omega_P| \cdot |\omega| \cdot \Theta_3 \cdot sin(\phi) \tag{10}$$

Für ϕ=90°:

$$\omega_P = \frac{M}{\omega \cdot \Theta_3} \tag{11}$$

6 Hautträgheitsmomente

Da wir in Aufgabe 3 und Aufgabe 5 Nutations- und Präzessionsfrequenzen bestimmt haben, ist es uns nun möglich, die Hauptträgheitsmomente des Kreisels zu bestimmen. Trägt man ω_P gegen $\frac{1}{\omega}$ auf, so erhält man aus der Steigung der Regressionsgeraden Θ_3:

$$\omega_P = \frac{M}{\Theta_3} \cdot \frac{1}{\omega} \tag{12}$$

Mit den Ergebnissen aus Aufgabe 3 können wir nun die anderen Hauptträgheitsmomente berechnen. Dazu tragen wir die Nutationsfrequenz ω_N über der Rotationsfrequenz ω auf:

$$\omega_N = \frac{\Theta_3}{\sqrt{\Theta_{1,korr.} \cdot \Theta_{2,korr.}}} \cdot \omega \tag{13}$$

$\Theta_{1,korr.}$ und $\Theta_{2,korr.}$ sind um die Trägheitsmomente der Aufhängung korrigiert (siehe Vorbereitungshilfe).

Um die Masse des Rotors abzuschätzen, benutzen wir seine Eigenschaft als Zylinder, dass für sein Hauptträgheitsmoment gilt: $\Theta_3 = \frac{1}{2}MR^2$. Durch Messen des Radius erhalten wir nun die gesuchte Masse.

7 Kreiselkompass

In diesem letzten Versuchsteil möchten wir einen Kreisel im beschleunigten Bezugssystem untersuchen. Der Aufbau entspricht dem eines Kreiselkompass. Da die Erdrotation jedoch in unseren Breiten zu gering ist, um den Effekt gut beobachten zu können, verwenden wir einen schräg stehenden Drehtisch als ´Erdkugel .

Zunächst fixieren wir den Kreisel in der Vertikalen und stellen ihn auf den Drehtisch. Figurenachse und Drehimpuls sind nun parallel zur rotierenden Ebene und senkrecht zur Drehachse ausgerichtet. Das angreifende Drehmoment wird nun aber versuchen, den Kreisel so auszurichten, dass seine Figurenachse nach ´Norden´(das Norden des Drehtischs) zeigt.

Für das auf einen Kreisel auf der Erde wirkende Drehmoment gilt:

$$\vec{M} = \vec{L}_{\text{Kreisel}} \times \vec{\omega}_{\text{Erde}} \tag{14}$$