

Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene (P3)

# Gitterschwingungen

Michael Lohse, Matthias Ernst  
Gruppe 11

Karlsruhe, 20.12.2010

---

# 1 Theoretische Grundlagen

## 1.1 Gitterschwingungen

In diesem Versuch sollen Phononen in Festkörpern mit Hilfe einer linearen Kette aus Gleitern, die über Federn miteinander gekoppelt sind und sich nahezu reibungsfrei auf einer Luftkissenbahn bewegen, simuliert und ihre Dispersionsrelation untersucht werden.

Der Grundzustand eines kristallinen Festkörpers ist eine periodische Anordnung der Atome mit bestimmten Symmetrieeigenschaften. Diese Anordnung wird beschrieben durch das zugrundeliegende Bravaisgitter, das durch die drei (in 3D) Basisvektoren der Elementarzelle aufgespannt wird und die räumliche Periodizität des Kristalls beschreibt, sowie die Basis, die die Anordnung der Atome innerhalb der Elementarzelle angibt. Aus dem Bravaisgitter erhält man durch Fouriertransformation das reziproke Gitter im Impulsraum, in dem man analog zur Wigner-Seitz-Zelle im Ortsraum die sogenannten Brillouin-Zonen definiert. Die erste Brillouin-Zone enthält dabei alle Punkte, deren Abstand zum Ursprung kleiner ist als zu allen anderen Gitterpunkten. In einem eindimensionalen Gitter mit einer Gitterkonstante  $a$  gilt für die erste Brillouin-Zone beispielsweise

$$-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a}$$

Die Kristallstruktur und insbesondere die Abstände der Atome zueinander im Gleichgewicht werden durch die Wechselwirkung zwischen den Atomen bestimmt. Diese ist für große Abstände attraktiv, während sie für kleine Abstände stark repulsiv wird, wodurch sich ein Minimum für die potentielle Energie als Funktion des Abstands ergibt, dessen Position den Gleichgewichtsabstand definiert. Die Wechselwirkung fällt meist stark mit dem Abstand ab, so dass in den meisten Fällen nur die Wechselwirkung mit den nächsten Nachbarn von Bedeutung ist. Durch thermische Anregungen kommt es bei endlichen Temperaturen zu Auslenkungen der Atome aus ihrer Gleichgewichtslage. Da diese Auslenkungen in der Regel klein sind, kann das Wechselwirkungs-Potential in der Nähe des Minimums als näherungsweise parabolisch betrachtet werden.

Sind die vereinfachenden Annahmen der harmonischen Näherung und Nächsten-Nachbar-Wechselwirkung gerechtfertigt, lässt sich das Kristallgitter idealisiert als ein System von mit Federn gekoppelten Punktmassen darstellen.

## 1.2 Wellen

### 1.2.1 Dispersionsrelation

Zur mathematischen Beschreibung der Orts- und Zeitabhängigkeit von Wellen wie beispielsweise mechanischer Wellen in Medien oder elektromagnetischer Wellen verwendet man den Wellenvektor  $k$  und die Kreisfrequenz  $\omega$ , die über die sogenannte Dispersionsrelation  $\omega = f(k)$  miteinander verknüpft sind.

Die Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

ist die Geschwindigkeit, mit der sich Flächen konstanter Phase im Raum ausbreiten. Betrachtet man ein Wellenpaket, das durch Überlagerung ebener Wellen entsteht, so bewegt sich dessen Schwerpunkt mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_{gr} = \frac{d\omega}{dk}$$

Die Gruppengeschwindigkeit ist im Allgemeinen verschieden von der Phasengeschwindigkeit, wodurch ein solches Wellenpaket mit der Zeit zerläuft. Nur im Falle einer linearen Dispersionsrelation wie sie beispielsweise bei elektromagnetischen Wellen im Vakuum oder langwelligen akustischen Phononen auftritt sind Phasen- und Gruppengeschwindigkeit gleich.

### 1.2.2 Stehende Wellen

Betrachtet man wie im vorliegenden Versuch eine lineare Kette aus miteinander gekoppelten, diskreten Massen mit festen Enden, so führt diese Randbedingung zur Ausbildung stehender Wellen, für die gilt:

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

wobei L die Gesamtlänge der Kette ist,  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  die Wellenlänge und n eine natürliche Zahl. Durch die endliche Zahl von Massen ist auch die Zahl der unterscheidbaren Eigenmoden begrenzt. Da die Wellen charakterisiert werden durch die Auslenkungen der Massen aus ihren Gleichgewichtslagen, die naturgemäß nur an bestimmten Punkten definiert sind, können Wellen mit kleiner Wellenlängen  $\lambda < 2a$  nicht von solchen mit großer Wellenlänge  $\lambda > 2a$  unterschieden werden, wobei a die Gitterkonstante der linearen Kette ist. Diese Tatsachen zusammen mit der Einschränkung möglicher Wellenlängen durch die äußeren Randbedingungen führt dazu, dass die Anzahl der Eigenmoden gerade gleich der Anzahl der Massen in der linearen Kette ist. Da die Wellenlängen der Eigenmoden nach unten beschränkt sind, liegen sämtliche Wellenvektoren innerhalb der ersten Brillouin-Zone, deren Rand definiert ist durch

$$k = \frac{\pi}{a}$$

## 1.3 Die lineare Kette

### 1.3.1 Einatomige Kette

Die lineare einatomige Kette besteht aus mehreren gleichen Massen m, die jeweils über Federn mit ihren Nachbarn gekoppelt sind und sich im Gleichgewicht in einem Abstand a von einander befinden. Betrachtet man ausschließliche longitudinale Auslenkungen, handelt es sich um ein eindimensionales Problem und die Position einer Masse lässt sich schreiben als

$$x_j(t) = x_{0,j} + s_j(t)$$

wobei  $x_{0,j} = ja$  die Ruhelage der j-ten Masse ist und  $s_j(t)$  die zeitabhängige Auslenkung aus dieser Ruhelage beschreibt. Durch die Kopplung über die Federn zwischen den Massen gilt nach dem Hookeschen Gesetz für die Auslenkung folgende Bewegungsgleichung mit der Federkonstanten D:

$$m\ddot{s}_j = D(s_{j+1} + s_{j-1} - 2s_j)$$

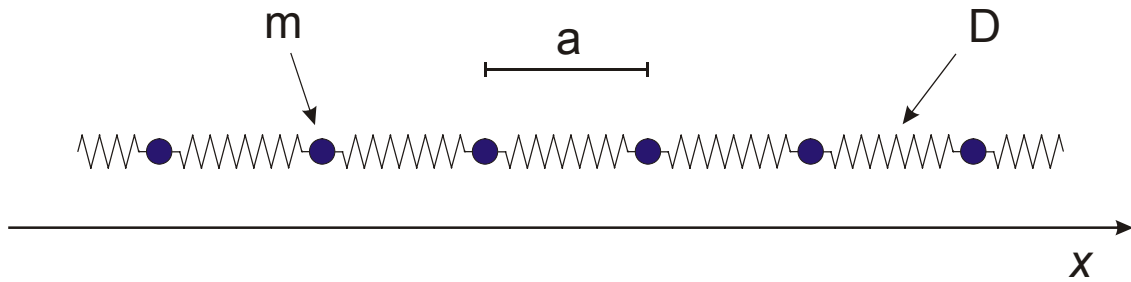


Abbildung 1: Lineare einatomige Kette (Quelle: Vorbereitungsmappe)

Das daraus resultierende System gekoppelter Differentialgleichungen kann gelöst werden mit dem Ansatz

$$s_j(t) = s_0 e^{i(kx_{0,j} - \omega t)}$$

Durch Einsetzen dieser ebenen Wellen in die Bewegungsgleichung erhält man die in Abbildung 2 gezeigte Dispersionsrelation für die lineare einatomige Kette:

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4D}{m}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

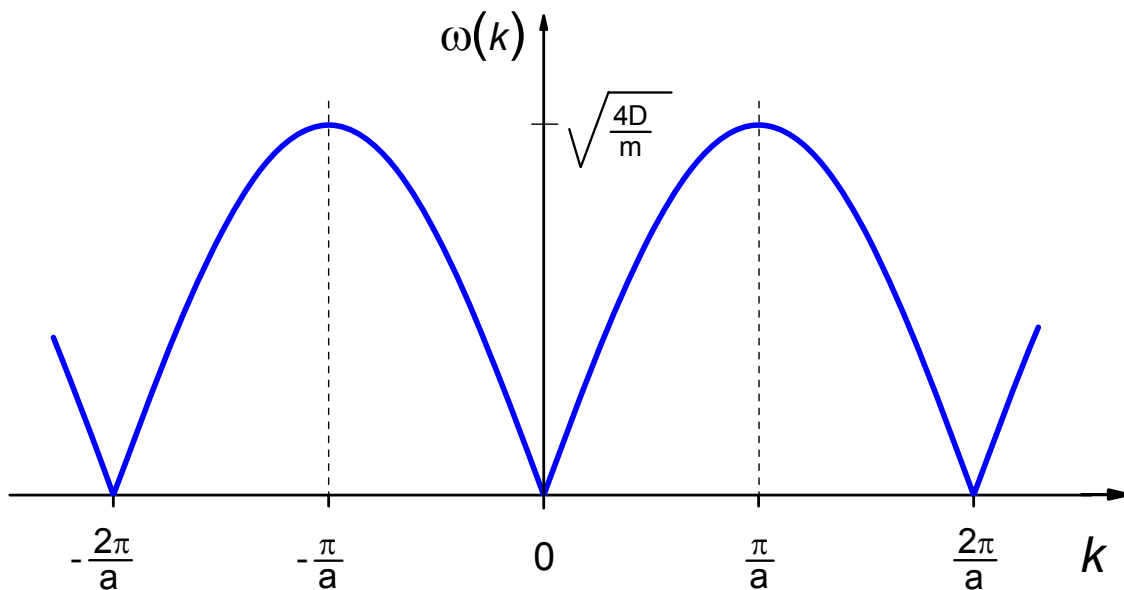


Abbildung 2: Dispersionsrelation der linearen einatomigen Kette (Quelle: Vorbereitungsmappe)

Wegen der endlichen Ausdehnung der Kette und endlichen Anzahl an Massen und der damit einhergehenden Beschränkung der Anzahl an Eigenmoden sind nur diskrete Werte von  $k = n\frac{\pi}{L}$  erlaubt und nur die Moden innerhalb der ersten Brillouin-Zone  $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$  sind physikalisch unterscheidbar.

Betrachtet man die Dispersionsrelation im Grenzfall kleiner Wellenvektoren  $ka \ll 1$ , erhält man eine lineare Beziehung, so dass Gruppen- und Phasengeschwindigkeit gleich sind und mit der Schallgeschwindigkeit übereinstimmen:

$$v_{gr} = v_{ph} = \sqrt{\frac{Da^2}{m}}$$

### 1.3.2 Zweiatomige Kette

Haben die Elemente der linearen Kette zwei unterschiedliche Massen  $m$  und  $M$ , so spricht man von einer zweiatomigen Kette. Der Gitterabstand  $a$  entspricht in diesem Fall dem doppelten Gleichgewichtsabstand zwischen benachbarten Massen, da nur jede zweite Masse gleich ist und damit die zugehörigen Punkte identisch sind. Die lineare zweiatomige Kette lässt sich somit beschreiben durch ein eindimensionales Gitter mit Abstand  $a$  und eine Basis, die aus den zwei unterschiedlichen Massen  $m$  und  $M$  besteht, die sich im Abstand  $a/2$  befinden.

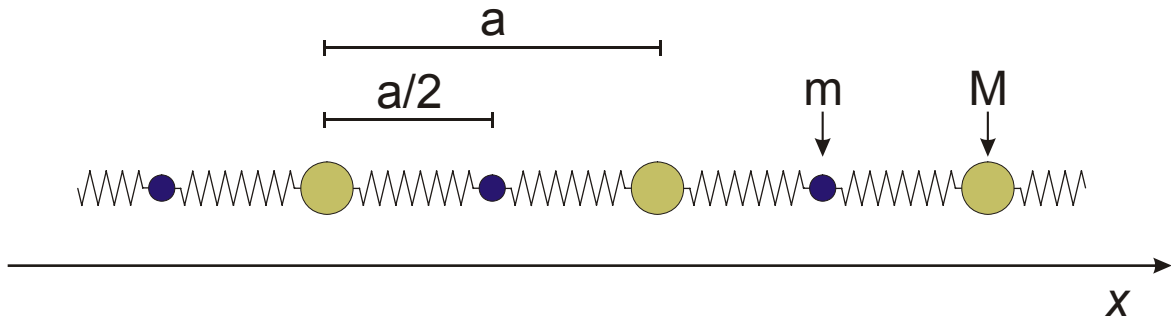


Abbildung 3: Lineare zweiatomige Kette (Quelle: Vorbereitungsmappe)

Die gekoppelten Bewegungsgleichungen erhält man analog zur einatomigen Kette aus dem Hooke'schen Gesetz:

$$m\ddot{s}_j = D(s_{j+1} + s_{j-1} - 2s_j)$$

$$M\ddot{s}_{j+1} = D(s_{j+2} + s_j - 2s_{j+1})$$

Als Ansatz wählt man wieder ebene Wellen, allerdings mit unterschiedlichen Amplituden  $s_{0,m}$  und  $s_{0,M}$  für die leichten und schweren Massen. Durch Einsetzen erhält man ein lineares Gleichungssystem für  $s_{0,m}$  und  $s_{0,M}$ , aus dem über die Forderung der Existenz einer nichttrivialen Lösung die Dispersionsrelation folgt:

$$\omega_{\pm}^2 = D \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \pm D \sqrt{\left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^2 - \frac{4}{mM} \sin^2 \left( \frac{ka}{2} \right)}$$

Wie in Abbildung 4 zu sehen existieren nun zu jedem Wert von  $k$  zwei unterschiedliche Lösungen, der akustische ( $\omega_-$ ) und der optische Zweig ( $\omega_+$ ), die durch eine Frequenzlücke getrennt sind. Die leichten und schweren Massen schwingen im akustischen Ast in Phase und im optischen Ast gegenphasig. Der akustische Ast zeigt für kleine  $k$ -Werte wieder ein lineares Verhalten, aus dem sich die Schallgeschwindigkeit

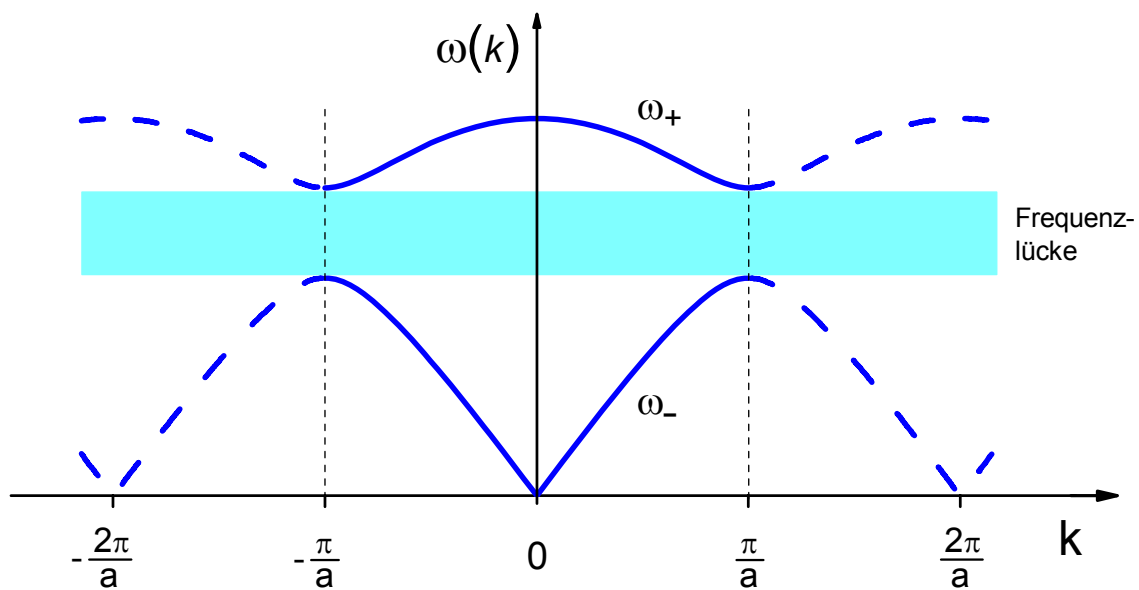


Abbildung 4: Dispersionsrelation der linearen zweiatomigen Kette (Quelle: Vorbereitungsmappe)

$$v_{gr}(k \rightarrow 0) = \sqrt{\frac{Da^2}{2(m+M)}}$$

bestimmen lässt. Die Gesamtzahl der Moden entspricht wie bei der einatomigen Kette der Anzahl der Massen, da zwar die Brillouin-Zone und damit die Anzahl möglicher  $k$ -Werte wegen der doppelt so großen Gitterkonstante nur noch halb so groß ist, es aber gleichzeitig zu jedem  $k$  eine akustische und eine optische Mode gibt.

## 2 Aufbau und Durchführung

Zur Realisierung einer linearen Ketten werden in diesem Versuch zwölf Gleiter verwendet, die sich auf einer Luftkissenbahn befinden und sich damit nahezu reibungsfrei bewegen können. Zwischen den Gleitern befinden sich identische Federn und der Gleichgewichtsabstand beträgt 41.4 cm bei einer Gesamtlänge der Kette von 538.1 cm. Die Gleiter haben alle die gleiche Masse, können aber zur Simulation der zweiatomigen Kette mit einem zusätzlichen Gewicht versehen werden. Um einzelne Moden der Kette gezielt anregen zu können, ist das eine Ende der Kette mit einem Schrittmotor verbunden, dessen Frequenz und Anregungsamplitude manuell eingestellt werden können. Das andere Ende der Kette ist unbeweglich.

Die Bewegung der Gleiter wird mit einer Kamera beobachtet. Dazu sind zwei benachbarte Gleiter mit Reflektorstreifen versehen, die von mehreren LEDs erzeugte Lichtblitze reflektieren, die dann von der Kamera aufgezeichnet und mit Hilfe eines LabVIEW-Programms über den Computer ausgelesen werden. Auf diese Weise lassen sich die Auslenkungen der beiden Gleiter mit einer Zeitauflösung von 25 ms und einer Ortsauflösung von 0.25 mm beobachten.

Mit diesem Versuchsaufbau wurde zunächst ohne Zusatzmassen die einatomige Kette untersucht.

Dazu wurde von Hand eine der Massen angeregt, die Auslenkungen der beiden Gleiter in einem Zeitintervall von etwa 100 Sekunden aufgezeichnet und über eine diskrete Fourier-Transformation aus den gemessenen Werten die Eigenfrequenzen bestimmt. Im Anschluss daran wurde an jeden zweiten Gleiter eine der zusätzlichen Massen angebracht und damit in analoger Weise die Eigenfrequenzen der zweiatomigen Kette untersucht. Für die zweiatomige Kette wurden außerdem mit Hilfe des Schrittmotors alle zwölf Eigenmoden angeregt, indem der Schrittmotor mit der gemessenen zugehörigen Frequenz und geeigneter Amplitude betrieben wurde. Nach dem Einschwingvorgang wurden dann die Amplituden der beiden Gleiter mit Hilfe der Kamera gemessen.

### 3 Auswertung

#### 3.1 Dispersionsrelationen

##### 3.1.1 Einatomige Kette

Wie eben beschrieben wurden zuerst die Eigenfrequenzen der einatomigen Kette ermittelt, indem diese viermal am äußersten Gleiter (Gleiter 1, Messung 1-4) und je einmal an Gleiter 4 (Messung 5) und Gleiter 7 (Messung 6) durch einen kurzen Stoß angeregt wurde. Die jeweils aus den gemessenen Auslenkungen als Funktion der Zeit ermittelten Eigenfrequenzen sowie die zugehörigen Wellenvektoren  $k = n\frac{\pi}{L}$  mit  $L = 538.1$  cm sind in Tabelle 1 aufgeführt.

Mode	k in 1/m	1	2	3	4	5	6	$\nu_n$ in 1/s	$\sigma_\nu$ in 1/s
1	<b>0.58</b>	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28	<b>0.2772</b>	<b>0.0003</b>
2	<b>1.17</b>	0.55	0.55	0.55	0.55	0.55	0.55	<b>0.5519</b>	<b>0.0003</b>
3	<b>1.75</b>	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82	0.82	<b>0.8174</b>	<b>0.0004</b>
4	<b>2.34</b>	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	1.07	<b>1.0733</b>	<b>0.0004</b>
5	<b>2.92</b>	1.32	1.32	1.32	1.32	1.32	1.31	<b>1.3154</b>	<b>0.0003</b>
6	<b>3.50</b>	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54	1.54	<b>1.5384</b>	<b>0.0004</b>
7	<b>4.09</b>	1.74	1.74	1.74	1.74	1.74	1.74	<b>1.7418</b>	<b>0.0004</b>
8	<b>4.67</b>	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92	1.92	<b>1.9197</b>	<b>0.0003</b>
9	<b>5.25</b>	2.07	2.07	2.07	2.07	2.07	2.07	<b>2.0680</b>	<b>0.0002</b>
10	<b>5.84</b>	2.19	2.19	2.19	2.19	2.19	2.19	<b>2.1881</b>	<b>0.0004</b>
11	<b>6.42</b>	2.28	2.28	2.28	2.28	2.28	2.28	<b>2.2779</b>	<b>0.0003</b>
12	<b>7.01</b>	2.33	2.33	2.33	2.33	2.33	2.33	<b>2.3293</b>	<b>0.0004</b>

Tabelle 1: Eigenfrequenzen der linearen einatomigen Kette

Trägt man die Eigenkreisfrequenzen  $\omega = 2\pi\nu$  über dem Wellenvektor  $k$  auf, erhält man die in Abbildung 5 gezeigte Dispersionsrelation. Zusätzlich zu den experimentell ermittelten Werte wurde hier auch noch der nicht gemessene Punkt (0,0) hinzugefügt. Der ebenfalls eingezeichnet Rand der ersten Brillouin-Zone lässt sich mit Hilfe der gemessenen Gitterkonstante  $a = 41.4$  cm berechnen:

$$k_{max} = \frac{\pi}{a} = 7.59 \frac{1}{m}$$

Unter Verwendung der gemessenen Gitterkonstante und der bekannte Masse der Gleiter  $m = 0.504$  kg lässt sich die Dispersionsrelation der einatomigen Kette

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4D}{m}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

an die Messwerte fitten und man erhält  $D = (27.10 \pm 0.08) \frac{N}{m}$

##### 3.1.2 Zweiatomige Kette

Zur Bestimmung der Dispersionsrelation der zweiatomigen Kette wurden auf jedem zweiten Gleiter die Zusatzgewichte angebracht und anschließend wieder die Eigenfrequenzen in analoger Weise

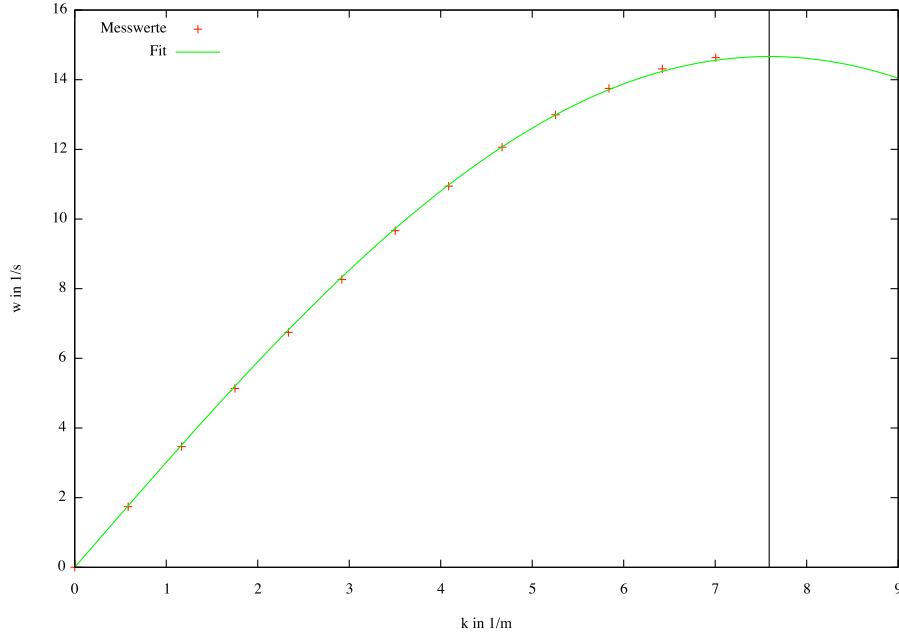


Abbildung 5: Gemessene Dispersionsrelation der linearen einatomigen Kette

bestimmt. Auch diesmal wurden neben der Anregung am ersten Gleiter auch je eine Messung durchgeführt, bei der die Anregung an Gleiter 4 bzw. 7 erfolgte. Da allerdings in diesen Fällen aufgrund der starken Unterdrückung einzelner Moden einige Eigenfrequenzen gar nicht ermittelt werden konnten und bei den anderen zum Teil kleinere Abweichungen auftraten, wurde darauf verzichtet, diese Werte zur Mittelwertbildung heranzuziehen. In Tabelle 2 sind die ermittelten Eigenfrequenzen und Wellenvektoren der zwölf Eigenmoden zusammengefasst.

Mode	k in m/s	1	2	3	4	$\nu_n$ in 1/s	$\sigma_\nu$ in 1/s
1	<b>0.58</b>	0.24	0.24	0.24	0.24	<b>0.2407</b>	<b>0.0003</b>
2	<b>1.17</b>	0.48	0.48	0.48	0.48	<b>0.4779</b>	<b>0.0004</b>
3	<b>1.75</b>	0.71	0.71	0.71	0.71	<b>0.7057</b>	<b>0.0005</b>
4	<b>2.34</b>	0.92	0.92	0.92	0.92	<b>0.9215</b>	<b>0.0004</b>
5	<b>2.92</b>	1.11	1.11	1.11	1.11	<b>1.1120</b>	<b>0.0002</b>
6	<b>3.5</b>	1.25	1.25	1.25	1.25	<b>1.2499</b>	<b>0.0004</b>
7	<b>3.5</b>	1.66	1.66	1.66	1.66	<b>1.6596</b>	<b>0.0003</b>
8	<b>2.92</b>	1.76	1.76	1.76	1.76	<b>1.7566</b>	<b>0.0002</b>
9	<b>2.34</b>	1.87	1.87	1.87	1.87	<b>1.8676</b>	<b>0.0001</b>
10	<b>1.75</b>	1.96	1.96	1.96	1.96	<b>1.9627</b>	<b>0.0002</b>
11	<b>1.17</b>	2.04	2.04	2.04	2.04	<b>2.0361</b>	<b>0.0002</b>
12	<b>0.58</b>	2.08	2.08	2.08	2.08	<b>2.0784</b>	<b>0.0002</b>

Tabelle 2: Eigenfrequenzen der linearen zweiatomigen Kette

Die Gitterkonstante der zweiatomigen Kette ist gerade das Doppelte der Gitterkonstante der einatomigen Kette, also 82.8 cm, woraus für den Rand der ersten Brillouin-Zone folgt:



$$k_{max} = \frac{\pi}{a} = 3.79 \frac{1}{m}$$

Für die beiden Äste der Dispersionsrelation gilt wie oben beschrieben:

$$\omega_{\pm}^2 = D \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right) \pm D \sqrt{\left( \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \right)^2 - \frac{4}{mM} \sin^2 \left( \frac{ka}{2} \right)}$$

Ein Fit an die gemessenen Werte liefert:

$$D_{akust} = (26.04 \pm 0.10) \frac{N}{m} \quad M_{akust} = (0.814 \pm 0.004) \text{ kg}$$

$$D_{opt} = (26.74 \pm 0.07) \frac{N}{m} \quad M_{opt} = (0.803 \pm 0.007) \text{ kg}$$

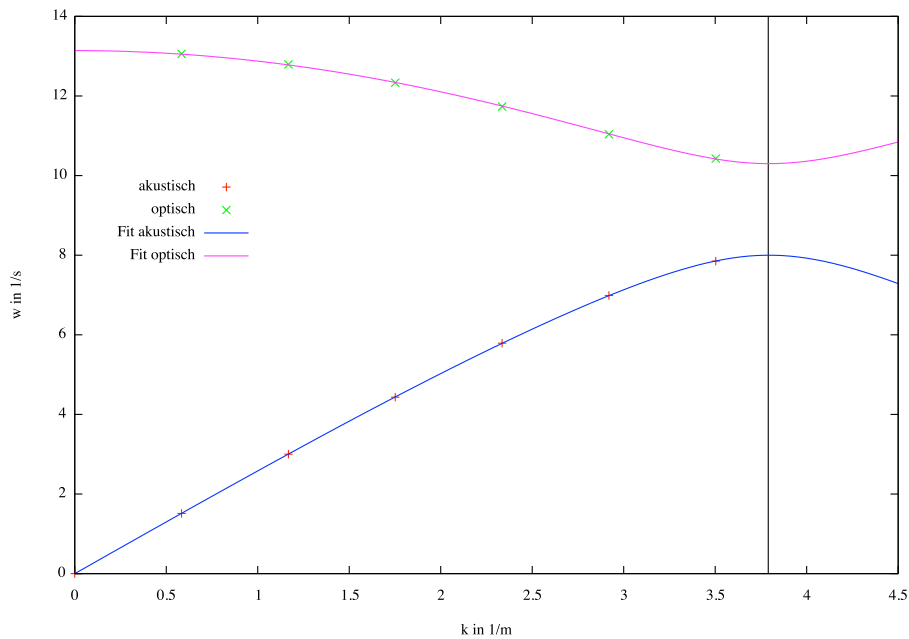


Abbildung 6: Gemessene Dispersionsrelation der linearen zweiatomigen Kette

### 3.2 Schallgeschwindigkeit

Sowohl für die einatomige als auch für die zweiatomige Kette lässt sich die Schallgeschwindigkeit aus der Steigung des linearen Teils der (akustischen) Dispersionsrelation bestimmen.

Nimmt man zur Bestimmung der Steigung einfach das Werte-Paar  $(0,0)$  und  $(k_1, \omega_1)$ , so erhält man für die einatomige Kette

$$v_{S,1} = \frac{\omega_1}{k_1} = (2.983 \pm 0.004) \frac{m}{s}$$

und für die zweiatomige Kette

$$v_{S,2} = (2.590 \pm 0.004) \frac{m}{s}$$

Der Fehler von  $v_S$  kann dabei mittels Größtfehlerabschätzung aus der Standardabweichung des Mittelwerts von  $\omega_1$  sowie dem Fehler von  $k_1$ , der aus einem möglichen Messfehler bei der Bestimmung der Gesamtlänge der Kette (Annahme  $\pm 1$  mm) resultiert, berechnet werden als:

$$\Delta v = \left| \frac{\partial v_s}{\partial \omega_1} \right| \sigma_\omega + \left| \frac{\partial v_s}{\partial k_1} \right| \Delta k = \frac{\sigma_\omega}{k_1} + \frac{\omega_1}{k_1^2} \Delta k$$

Alternativ kann die Schallgeschwindigkeit auch mit Hilfe der in der Vorbereitung hergeleiteten Formeln für die Dispersionsrelationen im Grenzfall kleiner Wellenvektoren und mit den oben ermittelten Fitparametern berechnet werden. Man erhält dann Werte von  $3.04 \frac{m}{s}$  für die einatomige und  $2.60 \frac{m}{s}$  für die zweiatomige Kette. Wie aufgrund der guten Übereinstimmung der Fits mit den Messwerten nicht anders zu erwarten, liegen diese Werte sehr nahe an den aus  $(k_1, \omega_1)$  ermittelten Werten.

### 3.3 Massenverhältnis

Aus den gemessenen Schallgeschwindigkeiten der einatomigen und zweiatomigen Kette kann mit Hilfe der analytischen Ausdrücke für die Gruppengeschwindigkeit für  $k \rightarrow 0$ , die in der Vorbereitung aus den berechneten Dispersionsrelation für die idealen Ketten abgeleitet wurden, das Verhältnis der Massen der leichten und schweren Gleiter ermittelt werden:

$$\gamma = \frac{M}{m} = 2 \frac{v_{S,1}^2}{v_{S,2}^2} - 1$$

mit  $v_{S,2} = v_{gr,2}(k \rightarrow 0) = \sqrt{\frac{Da_2^2}{2(m+M)}}$  und  $v_{S,1} = v_{gr,1}(k \rightarrow 0) = \sqrt{\frac{Da_1^2}{m}}$

Mit den aus den experimentell gemessenen Dispersionsrelationen bestimmten Schallgeschwindigkeiten ergibt sich

$$\gamma = 1.653 \pm 0.015$$

mit

$$\Delta \gamma = 4 \frac{v_{S,1}}{v_{S,2}^2} \Delta v_{S,1} + 4 \frac{v_{S,1}^2}{v_{S,2}^3} \Delta v_2$$

Vergleicht man dies mit dem aus dem Fit für den akustischen Ast der Dispersionsrelation der zweiatomigen Kette erhaltenen Wert von  $1,615 \pm 0.007$ , sieht man, dass die Werte zwar einigermaßen vergleichbar sind, die Differenz aber größer ist als durch die angegebenen Fehler zu erklären wäre.

### 3.4 Federkonstante

Für die lineare einatomige Kette lässt sich die Federkonstante leicht über die Dispersionsrelation

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4D}{m}} \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$$

aus einem beliebigen Wertepaar  $(\omega, k)$  berechnen, da sowohl die Gitterkonstante  $a = 41.4$  cm als auch die Masse der Gleiter  $m = 0.504$  kg bekannt ist. Führt man dies für alle gemessenen Wertepaare durch und berechnet den Mittelwert, ergibt sich

$$D = (26.858 \pm 0.007) \frac{N}{m}$$

In den Fehler geht dabei ausschließlich der Fehler von  $\omega$  ein, da  $k$  vom Inversen der gemessenen Gitterkonstante abhängt und damit die Federkonstante unabhängig von  $a$  ist. Wie nicht anders zu erwarten, ist dieser Wert recht ähnlich zu der durch den Fit der Dispersionsrelation ermittelten Federkonstanten von  $D = (27.10 \pm 0.08) \frac{N}{m}$ .

Ein weiterer Weg, um die Federkonstante zu ermitteln, ist über die Schallgeschwindigkeit der Kette, für die gilt

$$v_{S,1} = \sqrt{\frac{Da^2}{m}}$$

Mit dem aus dem Wertepaar  $(\omega_1, k_1)$  erhaltenen Wert von  $(2.983 \pm 0.004) \frac{m}{s}$  ergibt sich  $D = (26.17 \pm 0.08) \frac{N}{m}$ . Dieser Wert ist deutlich kleiner als der oben berechnete, was vermutlich daran liegt, dass die aus der Dispersionsrelation berechnete Federkonstante für kleinere Wellenvektoren kleiner ist und mit zunehmendem  $k$  im größer wird, was vermutlich auf Ungenauigkeiten bei der Frequenzbestimmung zurückzuführen ist.

Mit dem in 3.3 berechneten Massenverhältnis kann auch für die zweiatomige Kette die Federkonstante über die Dispersionsrelation berechnet werden:

$$D = \frac{\omega_{\pm}^2}{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)^2 - \frac{4}{mM} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)}}$$

Damit erhält man  $D = (26.468 \pm 0.015) \frac{N}{m}$  für den akustischen Ast und  $D = (27.004 \pm 0.003) \frac{N}{m}$  für den optischen Ast und damit insgesamt  $D = (26.736 \pm 0.008) \frac{N}{m}$ , was ebenfalls in etwa vergleichbar ist mit den aus dem Fit erhaltenen Werten.

Insgesamt fällt auf, dass die für die Federkonstante erhaltenen Werte für die ein- und zweiatomige Kette zwar in der gleichen Größenordnung liegen, sich aber doch stärker unterscheiden als dass dies alleine durch die berechneten Fehler erklärt werden könnte.

### 3.5 Amplitudenverhältnisse

Zur Bestimmung der Amplitude eines leichten und schweren Gleiters in der zweiatomigen Kette in den verschiedenen Eigenmoden, wurde die jeweilige Mode gezielt mit Hilfe des Schrittmotors am linken Ende der Kette angeregt, indem die entsprechende Eigenfrequenz und eine geeignete Anregungsamplitude eingestellt wurde. Vor der eigentlichen Messungen wurde einige Minuten gewartet, bis der Einschwingvorgang abgeschlossen war, und anschließend mit Hilfe der Kamera die Schwingungsamplituden der beiden Gleiter ermittelt.

Um das tatsächliche Amplitudenverhältnis zu erhalten, muss noch berücksichtigt werden, dass die Amplituden für den leichten und schweren Gleiter an verschiedenen Punkten gemessen wurden. Aus dem Ansatz ebener Wellen folgt für die Amplitude der Schwingung am Ort  $x$ :

$$s_0(x) = s_0 \sin(kx)$$

Dabei ist  $s_0$  die Amplitude an den Schwingungsbäuchen, also den Punkte maximaler Auslenkung. Die Gleiter befinden sich in der Kette an den Positionen  $x = j \frac{a_2}{2}$ , so dass für das Verhältnis der Amplituden der Gleiter  $j-1$  (Masse  $M$ ) und  $j$  (Masse  $m$ ) gilt:

$$\frac{s_{0,m}(x_j)}{s_{0,M}(x_{j-1})} = \frac{s_{0,m}}{s_{0,M}} \cdot \left| \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{13}j\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{13}(j-1)\right)} \right|$$

Die gemessenen Werte für die Gleiter 8 und 9 sind in Tabelle 4 und 5 im Anhang aufgeführt. Die berechneten Mittelwerte und Standardabweichungen der Amplituden für die verschiedenen Eigenmoden, die zugehörigen Korrekturfaktoren sowie das tatsächliche Amplitudenverhältnis finden sich in Tabelle 3.

Mode	Gleiter 8 (Masse M)		Gleiter 9 (Masse m)		Korrekturfaktor	$\frac{s_{0,m}}{s_{0,M}}$	Stdabw
	Mittelwert	Stdabw	Mittelwert	Stdabw			
<b>1</b>	180.12	0.07	157.22	0.00	1.14	<b>0.992</b>	<b>0.000</b>
<b>2</b>	89.81	0.42	122.64	0.39	0.71	<b>0.968</b>	<b>0.005</b>
<b>3</b>	50.23	0.40	25.77	0.22	1.94	<b>0.996</b>	<b>0.012</b>
<b>4</b>	85.92	0.03	46.72	0.14	1.50	<b>0.814</b>	<b>0.002</b>
<b>5</b>	25.38	0.21	61.11	0.24	0.24	<b>0.581</b>	<b>0.005</b>
<b>6</b>	82.51	1.14	16.04	0.18	1.77	<b>0.344</b>	<b>0.006</b>
<b>7</b>	17.08	1.48	5.47	0.36	1.77	<b>5.530</b>	<b>0.603</b>
<b>8</b>	4.61	0.14	56.03	1.04	0.24	<b>2.933</b>	<b>0.104</b>
<b>9</b>	27.93	0.44	39.12	0.62	1.50	<b>2.097</b>	<b>0.047</b>
<b>10</b>	13.69	0.24	10.87	0.31	1.94	<b>1.542</b>	<b>0.051</b>
<b>11</b>	14.65	0.19	34.20	0.27	0.71	<b>1.656</b>	<b>0.026</b>
<b>12</b>	11.43	0.21	17.08	0.22	1.14	<b>1.697</b>	<b>0.038</b>

Tabelle 3: Amplitudenverhältnisse der zweiatomigen linearen Kette

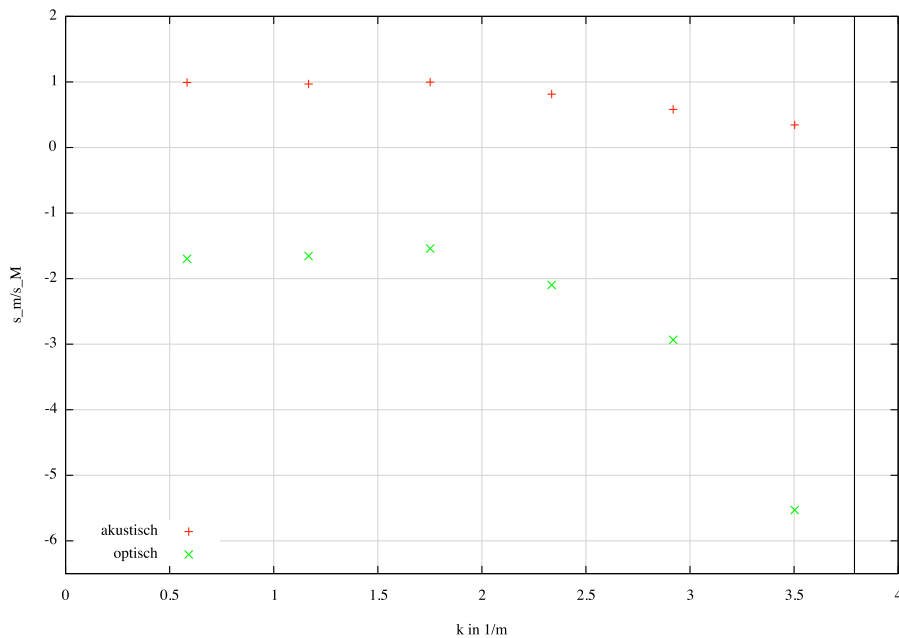


Abbildung 7: Amplitudenverhältnisse der zweiatomigen linearen Kette

Trägt man für den akustischen (Moden 1-6) und den optischen Ast (Moden 7-12) das Amplitudenverhältnis über dem Wellenvektor auf, ergibt sich Abbildung 7. Darin ist schön zu sehen, dass im akustischen Ast für kleine Wellenvektoren das Amplitudenverhältnis etwa eins ist, die leichten und schweren Masse also etwa gleich große Auslenkungen haben. Für größere Wellenvektoren nimmt das Verhältnis ab und nähert sich schließlich am Rand der Brillouin-Zone an null, d.h. die leichten Massen ruhen. Im optischen Ast ist das Amplitudenverhältnis negativ, da die leichten und schweren Massen gegenphasig schwingen. Für kleine Wellenvektoren ist das Verhältnis ungefähr konstant, fällt dann stark ab und geht für  $k \rightarrow \frac{\pi}{a}$  gegen  $-\infty$ , d.h. die schweren Massen ruhen.

## 4 Anhang

Mode Gleiter	1		2		3		4		5		6	
	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8
157.2177	180.0417	122.4000	89.6000	26.0463	51.0185	46.7222	85.9260	60.2824	24.5695	15.4398	79.7500	
157.2177	180.1760	123.0000	90.1000	26.0463	50.7500	46.5880	85.9260	61.2222	25.6435	15.8426	80.8241	
157.2177	180.1760	123.0000	90.2000	26.0463	50.7500	46.5880	85.9260	60.9537	25.5093	15.9769	81.0926	
157.2177	180.1760	123.3000	90.4000	26.0463	50.7500	46.5880	85.9260	61.2222	25.5093	15.8426	81.3611	
157.2177	180.1760	123.3000	90.4000	26.0463	50.6158	46.5880	85.9260	61.0880	25.3750	16.1111	81.4954	
157.2177	180.1760	123.0000	90.4000	25.9120	50.4815	46.5880	85.9260	61.0880	25.3750	15.9769	81.8982	
157.2177	180.1760	122.8000	90.2000	25.9120	50.4815	46.5880	85.9260	61.0880	25.5093	15.9769	82.1667	
157.2177	180.0417	122.7000	90.1000	25.9120	50.3472	46.5880	85.9260	61.2222	25.5093	16.1111	82.1667	
157.2177	180.0417	122.7000	90.0000	25.7778	50.3472	46.5880	85.9260	61.0880	25.3750	16.1111	82.5695	
157.2177	180.0417	122.8000	90.0000	25.7778	49.8102	46.5880	85.9260	60.8195	25.3750	16.1111	82.5695	
157.2177	180.0417	122.7000	89.7000	25.7778	50.2130	46.8565	85.9260	61.0880	25.3750	16.1111	82.8380	
157.2177	180.0417	122.6000	89.7000	25.6435	50.0787	46.9908	85.9260	61.2222	25.3750	15.9769	82.9723	
157.2177	180.1760	122.6000	89.4000	25.6435	49.9445	46.8565	85.9260	61.2222	25.3750	16.1111	83.1065	
157.2177	180.1760	122.4000	89.4000	25.6435	49.9445	46.8565	85.9260	61.2222	25.3750	16.2454	83.3750	
157.2177	180.1760	122.3000	89.4000	25.6435	49.8102	46.7222	85.7917	61.2222	25.5093	16.1111	83.6436	
157.2177	180.1760	122.3000	89.4000	25.6435	49.8102	46.7222	85.9260	60.9537	25.3750	16.1111	83.6436	
157.2177	180.0417	122.2000	89.3000	25.5093	49.8102	46.8565	85.9260	61.2222	25.3750	16.1111	83.6436	
157.2177	180.0417	122.0000	89.3000	25.6435	49.8102	46.8565	85.9260	61.3565	25.2408	16.1111	83.6436	
157.2177	180.1760	122.0000	89.3000	25.3750	49.8102	46.8565	85.9260	61.3565	25.3750	16.2454	83.6436	
157.2177	180.1760	122.0000	89.3000	25.3750	49.6759	46.8565	85.9260	61.3565	25.3750	16.1111	83.7778	
<b>Mittelwert</b>	<b>157.22</b>	<b>180.12</b>	<b>122.64</b>	<b>89.81</b>	<b>25.77</b>	<b>50.23</b>	<b>46.72</b>	<b>85.92</b>	<b>61.11</b>	<b>25.38</b>	<b>16.04</b>	<b>82.51</b>
<b>Stdabw</b>	<b>0.00</b>	<b>0.07</b>	<b>0.39</b>	<b>0.42</b>	<b>0.22</b>	<b>0.40</b>	<b>0.14</b>	<b>0.03</b>	<b>0.24</b>	<b>0.21</b>	<b>0.18</b>	<b>1.14</b>

Tabelle 4: Akustischer Ast - Gemessene Amplituden

Mode Gleiter	7		8		9		10		11		12	
	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8
5.5046	18.5278	57.4630	4.4306	40.0093	28.4630	10.4722	13.0232	33.8333	14.3657	16.6482	11.0093	
6.1759	19.3333	57.8658	4.8333	40.0093	28.7315	11.2778	13.5602	34.5046	14.7685	17.3195	11.8148	
6.1759	18.7963	57.5972	4.8333	39.8750	28.4630	11.2778	13.5602	34.3704	14.9028	17.3195	11.8148	
5.7732	18.1250	57.3287	4.6991	39.8750	28.4630	10.7407	13.9630	34.6389	14.7685	17.3195	11.5463	
5.6389	17.1852	56.9259	4.6991	39.8750	28.1945	11.1435	13.8287	34.6389	14.9028	17.0509	11.5463	
5.5046	16.1111	56.7917	4.5648	39.4722	28.1945	11.2778	13.5602	34.2361	14.6343	16.9167	11.2778	
4.9676	15.5741	56.3889	4.5648	39.4722	28.1945	10.8750	13.9630	34.5046	14.7685	16.9167	11.4120	
5.1019	14.7685	56.2547	4.6991	39.4722	28.1945	11.0093	13.6945	34.3704	14.7685	17.4537	11.4120	
5.2361	14.5000	56.3889	4.6991	39.2037	28.1945	11.1435	13.4259	34.5046	14.6343	17.4537	11.5463	
4.8333	14.7685	55.8519	4.8333	39.2037	27.7917	10.8750	13.6945	34.2361	14.6343	17.3195	11.2778	
4.9676	15.5741	55.8519	4.5648	39.0695	27.9259	11.0093	13.5602	34.2361	14.9028	16.9167	11.2778	
5.2361	16.1111	55.7176	4.6991	38.8009	27.6574	11.0093	13.9630	34.1019	14.7685	16.9167	11.2778	
5.6389	16.9167	55.5834	4.5648	38.9352	27.6574	11.1435	13.9630	34.2361	14.7685	16.9167	11.5463	
5.5046	17.9907	55.1806	4.5648	38.8009	27.7917	10.6065	13.8287	33.9676	14.7685	17.0509	11.8148	
5.3704	18.2593	55.1806	4.4306	38.8009	27.6574	10.8750	13.5602	33.9676	14.5000	17.1852	11.4120	
5.6389	18.5278	55.1806	4.5648	38.5324	27.6574	10.8750	13.4259	33.9676	14.5000	17.0509	11.2778	
5.6389	18.2593	54.7778	4.4306	38.5324	27.3889	10.3380	13.8287	33.8333	14.2315	16.9167	11.2778	
5.6389	17.9907	54.7778	4.4306	38.2639	27.3889	10.4722	13.6945	33.9676	14.5000	16.9167	11.2778	
5.6389	17.4537	54.7778	4.4306	38.1296	27.3889	10.4722	13.6945	33.9676	14.5000	16.9167	11.4120	
5.2361	16.9167	54.6435	4.5648	38.1296	27.1204	10.4722	13.9630	33.8333	14.3657	17.0509	11.4120	
<b>Mittelwert</b>	<b>5.47</b>	<b>17.08</b>	<b>56.03</b>	<b>4.61</b>	<b>39.12</b>	<b>27.93</b>	<b>10.87</b>	<b>13.69</b>	<b>34.20</b>	<b>14.65</b>	<b>17.08</b>	<b>11.43</b>
<b>Stdabw</b>	<b>0.36</b>	<b>1.48</b>	<b>1.04</b>	<b>0.14</b>	<b>0.62</b>	<b>0.44</b>	<b>0.31</b>	<b>0.24</b>	<b>0.27</b>	<b>0.19</b>	<b>0.22</b>	<b>0.21</b>

Tabelle 5: Optischer Ast - Gemessene Amplituden