

Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene (P3)

Magnetisierung

Michael Lohse, Matthias Ernst
Gruppe 11

Karlsruhe, 22.11.2010

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Magnetismus

1.1.1 Allgemeines

Bringt man einen Festkörper in ein äußeres Magnetfeld ein, so kommt es zu einer Wechselwirkung zwischen dem Magnetfeld und den mikroskopischen magnetischen Momente im Inneren des Festkörpers, die sich als makroskopische Magnetisierung der Probe bemerkbar macht. Der Zusammenhang zwischen dem äußeren Magnetfeld und der daraus resultierenden Magnetisierung wird durch die magnetische Suszeptibilität χ beschrieben, die definiert ist als

$$\chi_{ij} = \frac{\partial M_i}{\partial H_j}$$

Im Allgemeinen ist die Suszeptibilität ein Tensor, der in komplizierter Weise von zahlreichen Größen wie beispielsweise der Frequenz und Stärke des Magnetfelds, aber auch der Vorbehandlung des Materials abhängen kann. Im einfachsten Fall für isotrope Medien in schwachen statischen Magnetfeldern ist die Beziehung zwischen Magnetfeld und Magnetisierung oft linear, so dass sich obige Definition vereinfachen lässt auf

$$\chi = \frac{M}{H}$$

Anhand der Suszeptibilität unterscheidet man verschiedene Arten des Magnetismus:

- Diamagnetismus ($\chi < 0$): Die Magnetisierung ist dem äußeren Feld entgegengesetzt und wird durch vom äußeren Feld induzierte Dipolmomente hervorgerufen (Lenzsche Regel). Diamagnetismus tritt in allen Materialien auf, ist aber in der Regel aufgrund der geringen Suszeptibilität nur beobachtbar, wenn keine permanenten magnetischen Momente vorhanden sind. Die Suszeptibilität bei diamagnetischen Materialien ist im Allgemeinen unabhängig von der Temperatur.
- Paramagnetismus ($\chi > 0$): Magnetisierung parallel zum äußeren Feld, hervorgerufen durch Ausrichtung permanenter magnetischer Momente (z.B. Spin- und Bahnmomente der Elektronen), die ohne äußeres Feld aufgrund thermischer Fluktuationen ungeordnet sind. Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität wird beschrieben durch das Curie-Weiss-Gesetz: $\chi = \frac{C}{T}$
- Kollektiver Magnetismus: Bei einigen Materialien treten unterhalb einer kritischen Temperatur T_C Phasen mit langreichweitiger magnetischer Ordnung auf, in denen sich vorhandene magnetische Momente durch Wechselwirkung untereinander spontan ausrichten. Charakteristisch für Materialien mit magnetischer Ordnung ist eine stark nicht-lineare Abhängigkeit der Magnetisierung vom angelegten Magnetfeld, die zudem durch die Vorbehandlung der Probe beeinflusst wird, was sich als Hysterese in der Magnetisierungskurve $M(H)$ bemerkbar macht.

1.1.2 Kollektiver Magnetismus

Die Grundlage des kollektiven Magnetismus ist die Austauschwechselwirkung zwischen magnetischen Momenten, die eine Folge des Pauli-Prinzips und Coulomb-Wechselwirkung ist. Betrachtet man zum Beispiel zwei Elektronen mit Spin, so besagt das Pauli-Prinzip, dass die Gesamtwellenfunktion, die sich aus Orts- und Spin-Anteil zusammensetzt, antisymmetrisch sein muss. Daraus folgt, dass die relative Ausrichtung der beiden Spins zueinander aufgrund der definierten Parität der Singulett- und Triplett-Zustände auch die Symmetrie der Ortswellenfunktion festlegt. In Kombination mit der Coulomb-Wechselwirkung führt dies dazu, dass die Energien der Singulett- und Triplett-Zustände unterschiedlich sind. Dies lässt sich durch einen effektiven Spin-Hamilton-Operator der Form $H = -2J\vec{S}_1\vec{S}_2$ ausdrücken, wobei J die sogenannte Austauschaufspaltung ist, die näherungsweise durch das Austauschintegral A gegeben ist:

$$J \approx A = \int d^3r_1 d^3r_2 \phi_A^*(r_1) \phi_B^*(r_2) U_{int}(r_1 - r_2) \phi_B(r_1) \phi_A(r_2)$$

Man unterscheidet dabei zwischen der direkten Austauschwechselwirkung, die durch direkten Überlapp der Wellenfunktionen der Elektronen hervorgerufen wird, und der indirekten Austauschwechselwirkung, bei der Austausch z.B. durch andere lokalisierte Elektronen (Superaustausch) oder delokalisierte Leitungselektronen (RKKY-Wechselwirkung) vermittelt wird.

Ein Modell für ein System mit N lokalisierten magnetischen Momenten, die über die Austauschwechselwirkung miteinander wechselwirken und sich in einem äußeren Magnetfeld befinden, ist das Heisenberg-Modell, dessen Hamilton-Operator die folgende Form hat:

$$H = - \sum_{i \neq j} J_{ij} \vec{S}_i \vec{S}_j - g\mu_B \vec{B} \sum_i \vec{S}_i$$

Das Vorzeichen von J entscheidet dabei über die Form der magnetischen Ordnung: Ist $J > 0$, so wird eine parallele Ausrichtung der Spins bevorzugt und das System folglich einen ferromagnetischen Grundzustand haben, während für $J < 0$ die antiparallele Ausrichtung energetisch günstiger ist und sich somit eine antiferromagnetische Ordnung ausbilden wird.

Wegen der Nichtlinearität des Hamilton-Operators existieren für das Heisenberg-Modell in Systemen mit mehr als einer Dimension keine exakten Lösungen und man ist zur Berechnung analytischer Ausdrücke auf Näherungsverfahren angewiesen. Eine mögliche Näherung ist die sogenannte Molekularfeldnäherung, deren grundlegende Annahme ist, dass die Fluktuationen der Spins um ihren thermischen Mittelwert vernachlässigbar klein sind:

$$\left(\vec{S}_i - \langle \vec{S}_i \rangle \right) \left(\vec{S}_j - \langle \vec{S}_j \rangle \right) = \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \vec{S}_i \langle \vec{S}_j \rangle - \vec{S}_j \langle \vec{S}_i \rangle + \langle \vec{S}_i \rangle \langle \vec{S}_j \rangle \approx 0$$

Mit Hilfe dieser Annahme kann der Hamilton-Operator linearisiert werden und das Problem reduziert werden auf ein System nicht-wechselwirkender Spins in einem effektiven Magnetfeld, das wiederum vom Mittelwert der Spins abhängt:

$$H_{MF} = - \sum_i \underbrace{\left(\sum_{j \neq i} 2J_{ij} \langle \vec{S}_j \rangle + g\mu_B \vec{B} \right)}_{g\mu_B \vec{B}_{MF}} \cdot \vec{S}_i$$

Da die Spins nun unabhängig von einander sind, lässt sich die Zustandssumme und daraus die Magnetisierung des Systems leicht berechnen. Nimmt man an, dass das System homogen ist ($\langle \vec{S}_i \rangle =$

$\langle \vec{S} \rangle$) und nur die Austauschwechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn von Bedeutung ist (was aufgrund der starken Abstandabhängigkeit von J häufig eine berechtigte Annahme ist), erhält man für die Magnetisierung (mit $S = 1/2$):

$$M = g\mu_B \frac{N}{V} \langle S \rangle = \frac{1}{2} g\mu_B \frac{N}{V} \tanh \left(\frac{g\mu_B B_{MF}(M)}{2kT} \right)$$

Da B_{MF} ebenfalls von M abhängt, liefert diese Gleichung eine Selbstkonsistenz-Bedingung, aus der mögliche Lösungen für M graphisch bestimmt werden können. Dabei findet man, dass unterhalb einer kritischen Temperatur T_C das System selbst ohne äußeres Magnetfeld eine spontane Magnetisierung $M \neq 0$ aufweist (für ferromagnetische Kopplung).

Aus der Molekularfeld-Näherung lässt sich auch die Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung berechnen und man findet für die verschiedenen Temperaturbereiche:

- $T \ll T_C$: $M(T) \propto \left(1 - 2e^{-\frac{2T_C}{T}}\right)$
- $T \lesssim T_C$: $M(T) \propto \sqrt{1 - \frac{T}{T_C}}$
- $T > T_C$: $M(T) \propto \frac{B}{T - T_C}$ (Curie-Weiss-Gesetz)

Vergleicht man die Ergebnisse der Molekularfeldnäherung mit experimentellen Ergebnissen, so stellt man fest, dass diese das beobachtete Verhalten zwar qualitativ beschreiben kann, aber die berechneten Werte z.B. für die kritischen Exponenten in der Nähe des Phasenübergangs oder auch die kritische Temperatur oft von den experimentell ermittelten Werten abweichen. Ein Grund hierfür sind die in der Molekularfeldnäherung vernachlässigten Fluktuationen, die gerade in der Nähe des Phasenübergangs eine wichtige Rolle spielen und deren Behandlung komplexere Näherungsmethoden wie beispielsweise die Renormierungsgruppentheorie erfordern.

Weitere Abweichungen stellt man beim Verhalten der Magnetisierung für $T \rightarrow 0$ fest, die daher rühren, dass die Tieftemperaturanregungen im Rahmen der Molekularfeldnäherung nicht korrekt berücksichtigt werden. Die elementaren Anregungen eines geordneten magnetischen Systems sind sogenannte Magnonen, die analog zu den Phononen in Festkörpern quantisierte Spinwellen beschreiben. Vereinfacht kann man sich Magnonen als umgeklappte einzelne Spins vorstellen, die allerdings aufgrund der Wechselwirkung mit benachbarten Spins auch deren Ausrichtung beeinflussen. Da sich der Gesamtspin des Systems um $2S$, also einen ganzzahligen Wert ändert, sind Magnonen Bosonen und ihre Besetzungswahrscheinlichkeit wird durch die Bose-Einstein-Verteilung mit $\mu = 0$ beschrieben. Für kleine Impulse ist die Dispersionsrelation für Magnonen näherungsweise quadratisch, woraus sich eine Zustandsdichte ergibt, die mit der Wurzel der Energie skaliert. Daraus ergibt sich analog zum idealen Bose-Gas eine Teilchenzahl, die proportional zu $T^{3/2}$ ist, woraus für die Magnetisierung das Blochsche $T^{3/2}$ -Gesetz folgt:

$$\frac{M(T=0) - M(T)}{M(T=0)} \propto \left(\frac{k_B T}{2JS} \right)^{3/2}$$

1.2 Supraleitung

1.2.1 Allgemeines

Das Phänomen der Supraleitung wurde 1911 von Heike Kamerlingh Onnes entdeckt, als er bei der Untersuchung der Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands von Quecksilber bemerkte, dass unterhalb einer bestimmten kritischen Temperatur T_C der Widerstand der Probe

unmessbar klein wurde. Ein weiteres charakteristisches Merkmal der Supraleitung neben dem Verschwinden des elektrischen Widerstands ist der sogenannte Meißner-Effekt, der die Tatsache beschreibt, dass Supraleiter ideale Diamagneten sind und somit (im Gegensatz zum idealen Leiter) äußere Magnetfelder vollständig abschirmen.

Der Meißner-Effekt hat einige wichtige Konsequenzen für das Verhalten von Supraleitern. So folgt beispielsweise aus $\vec{B} = 0$ und der Maxwell-Gleichung $\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, dass für stationäre Zustände auch $\vec{j} = 0$ im Inneren des Supraleiters gilt. Der Strom durch einen Supraleiter muss also in einer dünnen Schicht in der Nähe der Oberfläche fließen. Eine weitere Folge des Meißner-Effekts ist die Existenz einer kritischen Feldstärke H_C sowie eines kritischen Stroms I_C , oberhalb derer eine supraleitende Probe wieder normalleitend wird. Der Grund hierfür ist die zur Kompensation eines äußeren Magnetfelds nötige Magnetisierung des Supraleiters, die dem äußeren Feld entgegengesetzt ist und somit einen positiven Beitrag zur freien Energie liefert, wodurch für starke Felder der normalleitende Zustand energetisch günstiger wird.

Eine vollständige mikroskopische Erklärung der (konventionellen) Supraleitung liefert die 1957 von Bardeen, Cooper und Schrieffer aufgestellte BCS-Theorie, viele grundlegende Effekte können aber auch im Rahmen früherer phänomenologischer Theorien wie der London-Theorie oder der Ginzburg-Landau-Theorie beschrieben werden. Grundlage der BCS-Theorie ist die Bildung sogenannter Cooper-Paare, d.h. gebundener Zustände zweier Elektronen mit entgegengesetztem Impuls und Spin, die in Gegenwart einer gefüllten Fermi-Kugel durch eine beliebig schwache attraktive Wechselwirkung zwischen den Elektronen (z.B. Elektron-Phonon-WW) hervorgerufen wird. Dadurch entsteht ein neuer, bosonischer Grundzustand mit geringerer Energie als der ursprüngliche Grundzustand des fermionischen Systems. Ähnlich der Bose-Einstein-Kondensation ist dieser Zustand durch eine makroskopische Besetzung des Einteilchen-Grundzustandes charakterisiert und lässt sich durch eine makroskopische Wellenfunktion $\psi(r)$ beschreiben. Die Bildung eines solchen kohärenten Zustandes ist auch der Grund für das Verschwinden des elektrischen Widerstands.

1.2.2 Flussquantisierung

Eine für diesen Versuch besonders wichtiges Merkmal von Supraleitern ist die Quantisierung des magnetischen Flusses, d.h. dass der magnetische Fluss Φ durch einen supraleitenden Ring nur ganzzahlige Vielfache des Flussquants $\Phi_0 = \frac{hc}{2e}$ annehmen kann.

Betrachtet man einen ringförmigen Supraleiter, dessen Grundzustand durch die Wellenfunktion $\psi(r) = |\psi(r)|e^{i\phi(r)}$ beschrieben wird, so folgt unter der Annahme einer konstanten Dichte von Cooper-Paaren ($n_S = |\psi(r)|^2$) aus der Eindeutigkeit der quantenmechanischen Wellenfunktion:

$$\oint \nabla \phi(r) \cdot d\vec{l} = n2\pi$$

D.h. die Phase der Wellenfunktion kann sich entlang eines beliebigen geschlossenen Pfads nur um ganzzahlige Vielfache von 2π ändern. Für die Stromdichte in Anwesenheit eines Magnetfelds gilt:

$$j_S = \frac{q}{m} \text{Re} \left(\psi^* \left(-i\hbar \nabla - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \psi \right) = \frac{qn_S}{m} \left(\hbar \nabla \phi - \frac{q}{c} \vec{A} \right)$$

Durch Integration über einen geschlossenen Weg im Inneren des supraleitenden Rings ($\vec{j} = 0$) und Anwendung des Satzes von Stokes folgt daraus die Flussquantisierung.

1.2.3 Josephson-Effekt

Der Josephson-Effekt beschreibt den Tunnelstrom zwischen zwei schwach gekoppelten Supraleitern, die beispielsweise über eine sehr dünne, nicht-supraleitende Schicht miteinander verbunden sind (Josephson-Kontakt). Für die Zeitentwicklung der beiden makroskopischen Wellenfunktion der beiden Supraleiter gilt dann:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = H_1 \psi_1 + g \psi_2$$
$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = H_2 \psi_2 + g \psi_1$$

wobei $H_{1/2}$ die Hamilton-Operatoren der einzelnen Supraleiter sind und g die Kopplung zwischen den Supraleitern beschreibt. Nimmt man an, dass die Kopplung sehr schwach ist, können $\psi_{1/2}$ näherungsweise durch die Eigenfunktion von $H_{1/2}$ ausgedrückt werden. Betrachtet man zwei identische Supraleiter und legt eine äußere Spannung U an den Josephson-Kontakt an, unterscheiden sich die Eigenenergien der Supraleiter gerade um $-2eU$ und aus den Schrödinger-Gleichungen folgen die Josephson-Gleichungen für die Zeitentwicklung der Cooper-Paar-Dichte und Phasendifferenz $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ zwischen den beiden Supraleitern:

$$\frac{\partial n_{S,1}}{\partial t} = \frac{2}{\hbar} g n_S \sin \Delta\phi$$
$$\hbar \frac{\partial \Delta\phi}{\partial t} = 2eU$$

Es lassen sich nun zwei Regime unterscheiden: Für kleine Ströme $I < I_C$ wird der Stromfluss durch den Josephson-Kontakt vollständig von tunnelnden Cooper-Paaren (Suprastrom I_S) getragen, der Kontakt verhält sich also wie ein Supraleiter und es fällt keine Spannung ab ($U = 0$). Der Stromfluss ist dabei abhängig von Phasendifferenz $\Delta\phi$ und es gilt $I_S = I_C \sin \Delta\phi$ (Gleichstrom-Josephson-Effekt).

Für $I > I_C$ tragen in der Barriere neben den Cooper-Paaren auch Einzelelektronen zum Stromfluss bei, wodurch der Josephson-Kontakt einen endlichen Widerstand erhält, der eine Spannung U zwischen den beiden Supraleitern zur Folge hat. Diese Spannung führt zu einer linear mit der Zeit anwachsenden Phasendifferenz, die wegen $I_S \propto \sin \Delta\phi$ wiederum zu einem oszillierenden supraleitenden Strom führt (Wechselstrom-Josephson-Effekt).

1.2.4 SQUID

Unter Ausnutzung des Josephson-Effekts und der Flussquantisierung lassen sich Änderungen von Magnetfeldern mit Hilfe sogenannter Superconducting Quantum Interference Devices (SQUIDs) sehr genau messen. Ein solches SQUID besteht aus einem supraleitenden Ring, in den entweder ein (RF-SQUID) oder zwei (DC-SQUID) Josephson-Kontakte eingebaut sind.

Befindet sich der Ring im supraleitenden Zustand, folgt aus der Flussquantisierung, dass der magnetische Fluss durch den Ring ein ganzzahliges Vielfaches von Φ_0 sein muss. Dabei setzt sich der magnetische Fluss zusammen aus dem äußeren Magnetfeld sowie dem Magnetfeld, das durch im Ring fließende Ströme erzeugt wird. Bei einer Änderung des äußeren Magnetfelds wird also in dem Ring gerade ein Strom induziert, der den Gesamtfluss auf das nächstliegende Vielfache von Φ_0 „auf- bzw. abrundet“. Zur Detektion dieses Stroms dienen die Josephson-Kontakte im Ring, da die an ihnen abfallende Spannung abhängig von der Stärke des induzierten Stroms ist. Damit lässt sich die Änderung des Magnetfelds indirekt über die am SQUID abfallende Spannung messen.

Während beim DC-SQUID ein supraleitender Ring mit zwei Josephson-Kontakten direkt an eine Gleichstrom-Spannungsquelle angeschlossen ist, besteht das in diesem Versuch verwendete RF-SQUID aus einem Ring mit nur einem Josephson-Kontakt, der induktiv an einen elektrischen Schwingkreis gekoppelt ist. Über den Schwingkreis wird in dem Ring ein oszillierender Strom induziert, wodurch der Josephson-Kontakt sich abhängig von der momentanen Gesamtstromstärke entweder im normal- oder supraleitenden Zustand befindet. Durch die Energiedissipation im normalleitenden Zustand wird der Schwingkreis gedämpft und dadurch die an ihm abfallende Spannung verändert. Wegen der aus der Flussquantisierung resultierenden Ströme im Ring hängt diese Spannung vom äußeren Magnetfeld ab und ermöglicht somit die Messung von Änderungen des Magnetfelds.

2 Versuchsaufbau

2.1 Aufbau

Der Versuch besteht im Wesentlichen aus einem Kryostaten, der mit flüssigem Stickstoff befüllt wird, in dem sich das SQUID befindet. Der Kryostat ist umgeben von einem Zylinder aus Mu-Metall, einer Nickel-Eisen-Legierung mit sehr hoher Permeabilität zur Abschirmung äußerer Magnetfelder. In diesen Zylinder wird unterhalb des Kryostaten der Probenhalter eingebracht.

Der Probenhalter ist aus Kupfer gefertigt und kann über eine Zu- und Ableitung entweder mit Stickstoff gekühlt oder mit Pressluft aufgewärmt werden. Die Temperatur unterhalb der Probe wird über die (lineare) Temperaturabhängigkeit eines Platin-Widerstands gemessen. Das SQUID ist mit einer Elektronik verbunden, die die am Schwingkreis abfallende Spannung in eine zum magnetischen Fluss proportionale Gleichspannung umwandelt. Der Widerstand des Platin-Drahtes und die SQUID-Spannung werden mit Digitalmultimetern gemessen, die mit einem Computer verbunden sind.

Mit Hilfe dieses Aufbaus soll die Magnetisierung folgender Proben in Abhängigkeit von der Temperatur gemessen werden:

- Terbium: Selten-Erd-Metall mit Elektronenkonfiguration $4f^9 6s^2$, Ferromagnet mit Curie-Temperatur von 219 K, zwischen 219 K und 229 K helimagnetisch (spiralförmige Anordnung der Spins aufgrund konkurrierender ferro- und antiferromagnetischer Austausch-WW)
- Gadolinium: Selten-Erd-Metall mit Elektronenkonfiguration $4f^7 5d^1 6s^2$, ferromagnetisch (Curie-Temperatur 292.5 K)

2.2 Durchführung

Vor Beginn des eigentlichen Versuchs wurden nacheinander die Kalibrierungsspule und eine Nickel-Eichprobe auf den Probenhalter aufgebracht, um eine Eichung des SQUIDs durchzuführen. Anschließend wurde die Remanenz-Magnetisierung der beiden oben beschriebenen Proben in Abhängigkeit von der Temperatur bestimmt. Dazu wurden die Proben im Feld eines Elektromagneten bei unterschiedlichen Feldstärken abgekühlt und anschließend bei der Erwärmung der Probe ohne äußeres Magnetfeld die Magnetisierung mit Hilfe des SQUIDs gemessen.

3 Auswertung

Anmerkung: Bei der Versuchsdurchführung und in der folgenden Auswertung haben wir die Orientierung auf die Ausrichtung bezüglich der SQUID-Fläche bezogen, so dass bei paralleler Orientierung die Oberfläche der Probe parallel zur SQUID-Fläche ist. In der Vorbereitung ist die parallele Orientierung dagegen wohl auf die Magnetisierung/Feldlinien bezogen und damit gerade andersherum definiert. Daher haben wir die Messungen an der Terbium-Probe immer mit der anderen Orientierung als gefordert durchgeführt, was leider bei der zweiten Messung (Magnetisierung für verschiedene äußere Magnetfelder) ein deutlich schwächeres und damit stärker schwankendes Signal zur Folge hat.

Aufgrund des begrenzten Messbereichs für die SQUID-Spannung kam es gelegentlich vor, dass dieser im Verlauf einer Messung überschritten wurde, was einen plötzlichen Sprung der gemessenen Spannung auf den Maximalausschlag zu Folge hatte. Um wieder korrekte Messwerte zu erhalten, musste dann eine Neujustierung des Nullpunkts vorgenommen werden. Dies führt zum einen dazu, dass in einem kleinen Temperaturintervall keine korrekten Werte aufgezeichnet werden, und verursacht zum anderen eine Unstetigkeit der gemessenen Spannung, was eine nachträgliche Bearbeitung der Daten erforderlich macht. Da bei unseren Messungen solche Sprünge aber nur oberhalb der Curie-Temperatur aufgetreten sind, wurde auf eine solche Bearbeitung verzichtet und die Messwerte oberhalb der Unstetigkeit verworfen.

3.1 Kalibrierung des SQUIDs

3.1.1 Kalibrierungsspule

Um das SQUID zu eichen, wurde eine auf einem Kupferzylinder aufgewickelte Spule mit Radius 0.35cm auf den Probenhalter montiert und anschließend zweimal die SQUID-Spannung in Abhängigkeit vom Spulenstrom gemessen. Das durch die Spule am Ort des SQUIDs erzeugte Magnetfeld lässt sich mit dem Biot-Savart-Gesetz (im elektromagnetischen CGS-System EMU)

$$B(x) = \frac{2I\pi R^2}{|x|^3}$$

berechnen, wobei I der Spulenstrom in abA (1abA = 10A), R der Radius der Spule in cm und x der Abstand zwischen Spule und SQUID in cm ist. Unsere Messungen ergaben (mit $x = 1.4\text{cm}$):

I [mA]	U [mV]	B [mG]
0	0	0
75	60	2.1
168.1	60	4.7
231.4	75	6.5
304	130	8.5
340	140	9.5
396	180	11.1

Messung 1

I [mA]	U [mV]	B [mG]
0	30	0
80	80	2.2
150	90	4.2
228	130	6.4
306	150	8.6
406	190	11.4

Messung 2

Trägt man nun die gemessene SQUID-Spannung über dem Magnetfeld auf, ergibt sich Abbildung 1. Den Fehler auf die Spannungsmessung schätzen wir aufgrund der starken Fluktuationen auf $\pm 30\text{mV}$. Im Vergleich dazu dürfte der Fehler bei der Messung des Spulenstroms zu vernachlässigen

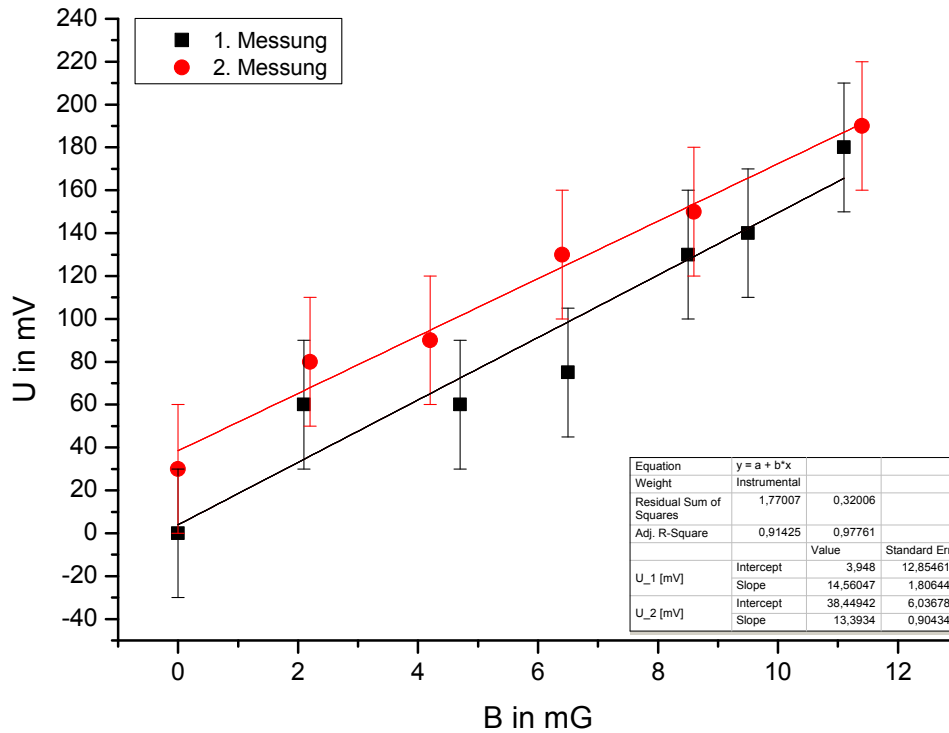


Abbildung 1: Kalibrierung

sein. Um die Kalibrierung durchführen zu können, haben wir für beide Messreihen eine gewichtete lineare Regression $ax + b$ mit dem Programm Origin durchgeführt. Als Ergebnis erhielten wir

$$U_1 = (14.6 \pm 1.8) \frac{V}{G} \cdot B + (4 \pm 12) \cdot 10^{-3} V$$

$$U_2 = (13.4 \pm 0.9) \frac{V}{G} \cdot B + (38 \pm 6) \cdot 10^{-3} V$$

Da wir nur an Änderung des Magnetfelds bzw. Änderungen der Spannung interessiert sind, ist nur die Steigung a der Ausgleichsgeraden für uns von Bedeutung. Bildet man aus beiden Messungen den Mittelwert ergibt sich $a = 14.0 \frac{V}{G}$ und für den Fehler nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial a_1} \sigma_{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial a_2} \sigma_{a_2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_{a_1}^2 + \sigma_{a_2}^2} = 1.0 \frac{V}{G}$$

Um aus einer gemessenen Spannung das Magnetfeld zu berechnen, muss man obige Beziehung noch invertieren:

$$\Delta B = \frac{1}{a} \Delta U = (0.072 \pm 0.005) \frac{G}{V} \cdot \Delta U$$

3.1.2 Nickel-Eichprobe

Eine weitere Möglichkeit, das SQUID zu kalibrieren, ist die Verwendung einer Probe mit bekannter Magnetisierung. Hierzu haben wir eine Nickel-Probe verwendet, diese in einem Elektromagneten magnetisiert und anschließend die resultierende SQUID-Spannung gemessen.

Um den Einfluss des Probenhalters auf die Messung zu minimieren, haben wir zunächst die Änderung der SQUID-Spannung beim Einbringen des Probenhalters gemessen. Diese Messung haben wir dreimal durchgeführt und dabei eine mittlere Spannungsänderung von $\Delta U = (-1630 \pm 15)\text{mV}$ beobachtet.

Unter der Annahme einer linearen Abhängigkeit vom äußeren Magnetfeld lässt sich die Magnetisierung der Nickelprobe aus der spezifischen Sättigungsmagnetisierung $\sigma_S = 55.09 \frac{\text{emu}}{\text{g}}$, dem dazu nötigen Magnetfeld $B_S = 6169 \text{ G}$ sowie der Masse der Probe $m = 0.0202\text{g}$ berechnen:

$$M(B) = \sigma_S m \frac{B_{EM}}{B_S}$$

Das Magnetfeld im Elektromagneten lässt sich nach Formel (3.3) aus der Vorbereitungsmappe folgendermaßen aus dem Spulenstrom berechnen:

$$B_{EM}(I_{EM}) = 984.61 \frac{\text{G}}{\text{A}} \cdot I_{EM} + 2.0587\text{G}$$

Das durch die Magnetisierung der Probe im SQUID hervorgerufene Magnetfeld lässt sich wiederum über das Biot-Savart-Gesetz berechnen:

$$B = 2 \frac{M}{|x|^3}$$

Wir haben die Messung je einmal für die senkrechte und parallele Orientierung der Probe auf dem Probenhalter durchgeführt und dabei folgende Spannungsänderungen gemessen:

	I [A]	B_{EM} [G]	M [emu]	B [G]	ΔU [mV]
parallel	1.17	1154	0.208	0.152	1700
senkrecht	1.168	1152	0.208	0.151	3300

Zur Abschätzung des Fehler haben wir wie oben angenommen, dass wir die Spannung auf $\pm 30\text{mV}$ genau messen und der Fehler bei der Strommessung im Vergleich dazu zu vernachlässigen ist. Subtrahiert man von den gemessenen Spannungen den Beitrag des Probenhalters und berechnet den Fehler mittels Größtfehlerabschätzung, erhält man $\Delta U_{\parallel} = (3330 \pm 45)\text{mV}$ und $\Delta U_{\perp} = (4930 \pm 45)\text{mV}$ und damit für die Proportionalitätskonstante

$$\alpha_{\parallel} = \frac{\Delta B_{\parallel}}{\Delta U_{\parallel}} = (0.046 \pm 0.004) \frac{\text{G}}{\text{V}}$$

$$\alpha_{\perp} = \frac{\Delta B_{\perp}}{\Delta U_{\perp}} = (0.031 \pm 0.002) \frac{\text{G}}{\text{V}}$$

Vergleicht man die Proportionalitätsfaktoren untereinander und mit dem mit der Kalibrierungsspule erhaltenen Wert von $(0.075 \pm 0.005) \frac{\text{G}}{\text{V}}$, sieht man, dass diese sich deutlich unterscheiden und die Unterschiede wesentlich größer sind, als durch die angenommenen Fehler zu erklären. Dies zeigt die Bedeutung der geometrischen Details der Probenform für das Magnetfeld der Probe und damit den im SQUID gemessenen Fluss. Dies führt dazu, dass der für die Spule gemessene Proportionalitätsfaktor anders ist als der für Nickelprobe und dass bei der Nickelprobe der Faktor für parallelen

Einbau größer ist als der für senkrechten. In Abbildung 2 ist der Einfluss der Probenform auf den Verlauf der Feldlinien qualitativ veranschaulicht.

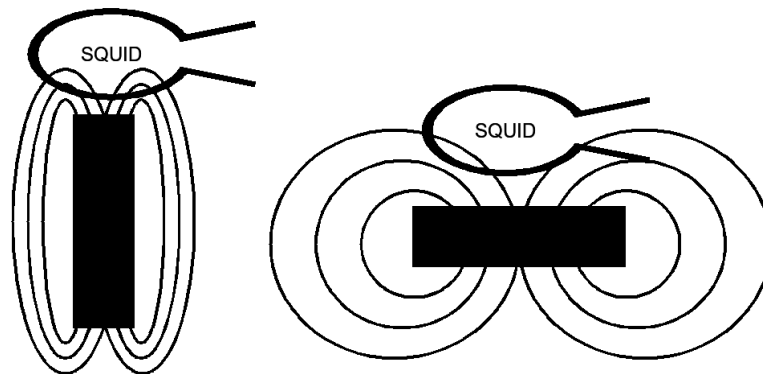


Abbildung 2: Magnetfeld einer Platte, links senkrecht, rechts parallel (Quelle: Vorbereitungsmappe)

Da wir nicht am tatsächlichen Magnetfeld der Proben, sondern an ihrer Magnetisierung interessiert sind, haben wir uns daher entschlossen, in der weiteren Auswertung die mit der Nickelprobe erhaltenen Proportionalitätsfaktoren für die jeweilige Probenorientierung zu verwenden. Die Kalibrierung mit der Spule wäre in dem Fall vorzuziehen, wenn man die tatsächliche Änderung des Magnetfelds messen wollen würde. Für die Messung der Magnetisierung ist sie aber aufgrund der starken Abhängigkeit des Magnetfelds von der Probengeometrie weniger geeignet. Natürlich ist die Verwendung der Nickel-Probe eigentlich nur dann sinnvoll, wenn die zu untersuchende Probe die gleiche Form hat. Während diese Annahme für die Terbiumprobe vermutlich gerechtfertigt ist, erscheint dies im Fall der Gadolinium-Probe fraglich.

3.2 Terbium

3.2.1 Senkrechter Einbau

Bei senkrechter Orientierung der Terbium-Probe wurde die Temperaturabhängigkeit der Magnetisierung für drei verschiedene Fälle gemessen: Kühlung der Probe im Nullfeld mit und ohne anschließende Aufmagnetisierung sowie Kühlung der Probe im Magnetfeld des Elektromagneten. Die gemessenen Magnetisierungskurven sind in Abbildung 3 dargestellt.

Da die Curie-Temperatur von Terbium 229 K beträgt, sind die magnetischen Momente bei Raumtemperatur durch thermische Fluktuationen vollkommen ungeordnet. Kühlt man die Probe ohne äußeres Magnetfeld unter die Curie-Temperatur, bilden sich durch die Austauschwechselwirkung Bereiche aus, in denen sich die magnetischen Momente spontan entlang einer beliebigen Vorzugsrichtung parallel ausrichten (Weissche Bezirke). Da bei makroskopischen Proben aber viele dieser Bereiche mit untereinander zufälliger Orientierung der magnetischen Momente entstehen, ist die Gesamtmagnetisierung gleich null. Dies führt dazu, dass wie in Abbildung 3 zu sehen ohne vorherige Aufmagnetisierung auch unterhalb der Curie-Temperatur kein Magnetfeld gemessen wird.

Setzt man die Probe nach dem Abkühlen einem äußeren Magnetfeld aus, richten sich die magnetischen Momente der einzelnen Weisschen Bezirke teilweise entlang des Feldes aus. Für kleine Felder ist diese Ausrichtung allerdings nicht vollständig, da durch die Wechselwirkung der Bezir-

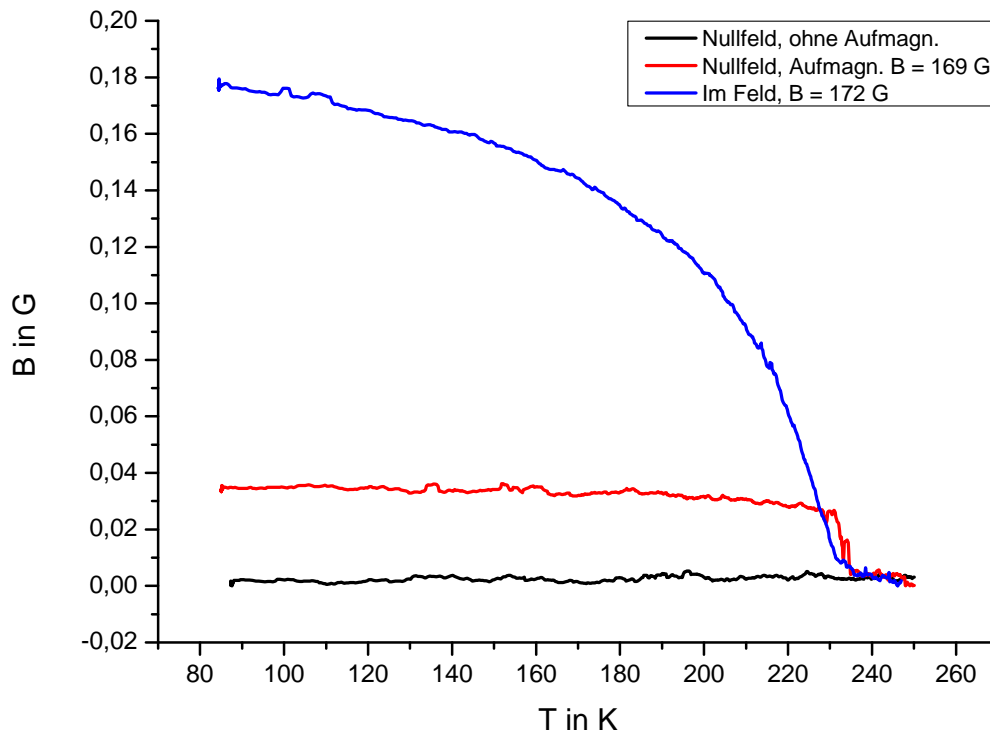


Abbildung 3: Magnetisierungskurve von Tb - Senkrechter Einbau

ke untereinander die Umorientierung eines Bezirks mit einem Energieaufwand verbunden ist und die thermische Energie durch die niedrige Temperatur klein ist. Aus diesem Grund zeigt die im Nullfeld gekühlte und anschließend aufmagnetisierte Probe nur eine vergleichsweise kleine Magnetisierung, die mit steigender Temperatur abnimmt und bei Erreichen der Curie-Temperatur abrupt verschwindet.

Bringt man die Probe bereits bei Raumtemperatur in ein Magnetfeld, so können sich die einzelnen Spins entlang der Feldlinien ausrichten. Wegen der kleineren Energien, die zum Umklappen eines einzelnen Spins nötig sind, und der höheren thermischen Energie führt dies zu einer wesentlich größeren Magnetisierung als bei der im Nullfeld gekühlten Probe. Kühlt man die Probe anschließend im Feld ab, bleibt diese Magnetisierung durch die Ausbildung der Weisschen Bezirke unterhalb der Curie-Temperatur auch nach dem Abschalten des Felds erhalten. Beim Aufwärmen der Probe nimmt die Magnetisierung wieder ab und verschwindet oberhalb der Curie-Temperatur völlig.

3.2.2 Paralleler Einbau

Für die nächsten Messungen wurde die Probe um 90° gedreht, im Elektromagneten bei drei verschiedenen Feldstärken gekühlt und dann beim Aufwärmen analog zu oben die Magnetisierung in Abhängigkeit von der Probentemperatur gemessen (Abbildung 4).

Insgesamt zeigt sich ein ähnliches Bild wie bei der im Feld gekühlten Probe mit senkrechter Orientierung: Das gemessene Magnetfeld wird mit steigender Temperatur kleiner und ist oberhalb

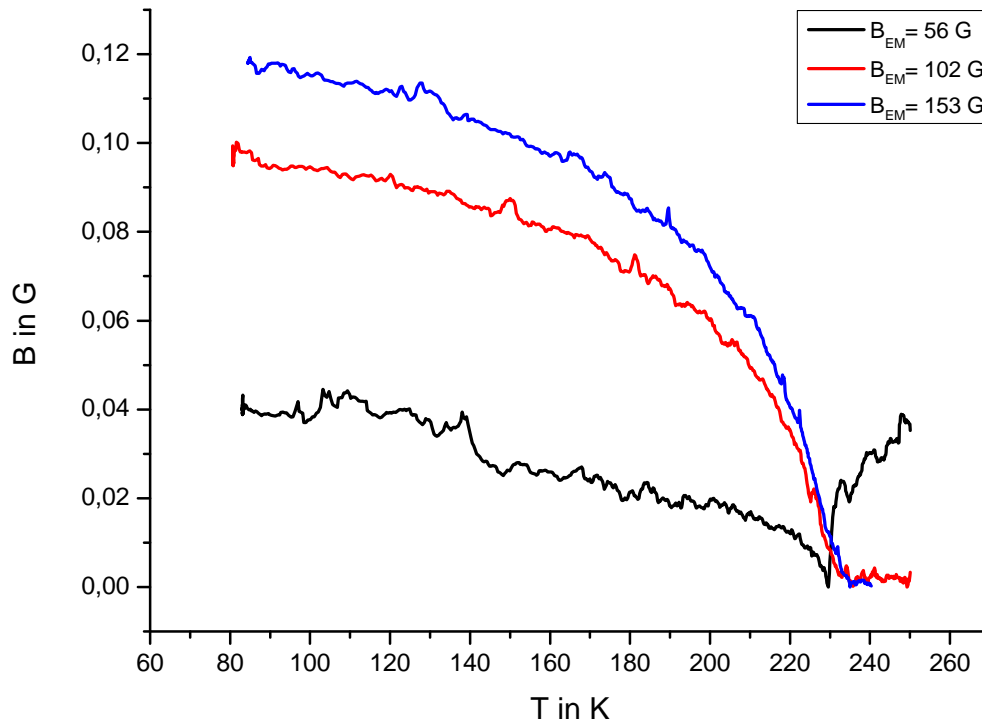


Abbildung 4: Magnetisierungskurve von Tb - Paralleler Einbau

der Curie-Temperatur null. Bei der Messung für $B = 56\text{G}$ beginnt die Magnetisierung für große Temperaturen plötzlich stark anzusteigen. Dieses offensichtlich unphysikalische Verhalten ist aber wohl auf eine äußere Störung zurückzuführen. Des Weiteren fällt auf, dass zum einen die gemessenen Spannungsunterschiede über die gesamte Temperaturskala kleiner sind als für die senkrechte Orientierung, was mit dem von der Probenform abhängigen Verlauf der Feldlinien zu erklären ist. Allerdings sind trotz der Verwendung der jeweiligen Proportionalitätsfaktoren für die verschiedenen Orientierungen zur Umrechnung der Spannung in das Magnetfeld die für den parallelen Einbau gemessenen Änderungen des Magnetfelds deutlich kleiner als beim senkrechten Einbau, was unter Umständen auf Unterschiede in der Probenform zwischen der Nickel-Eichprobe und der Terbium-Probe zurückgeführt werden könnte.

3.2.3 Curie-Temperatur

Die Curie-Temperatur als kritische Temperatur für den Übergang in die geordnete magnetische Phase lässt sich aus der Ableitung der Magnetisierung nach der Temperatur bestimmen, da diese bei T_C ein Minimum haben sollte (bzw. im Heisenberg-Modell sogar gegen $-\infty$ divergieren sollte). Um trotz der starken Schwankungen des gemessenen Magnetfelds vernünftige Ergebnisse für die Ableitung zu erhalten, haben wir die Messwerte über Bereiche von jeweils 2 K gemittelt und dann den Differenzenquotient für diese Mittelwerte berechnet. Dies führt auf die Abbildung 5 und 6 gezeigten Kurven, aus denen sich die Werte für T_C ablesen lassen.

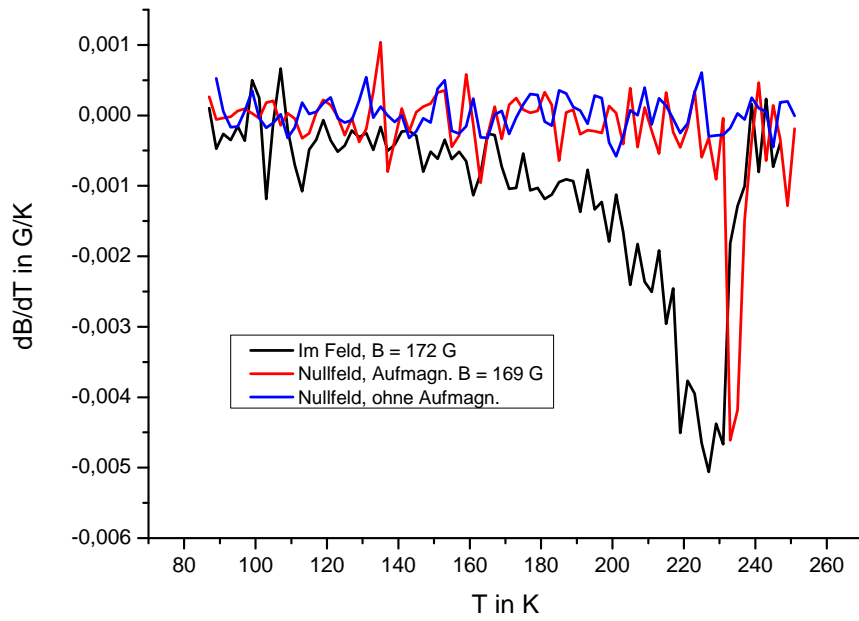


Abbildung 5: Änderung der Magnetisierung von Tb mit der Temperatur - senkrechter Einbau

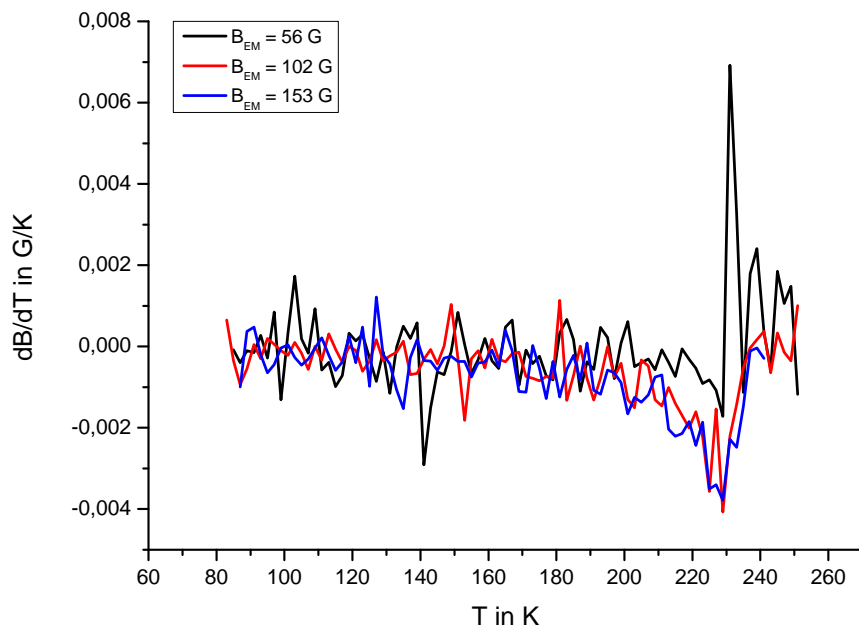


Abbildung 6: Änderung der Magnetisierung von Tb mit der Temperatur - paralleler Einbau

	Orientierung	T_C [K]
Nullfeld, Aufmagn.	senkrecht	233
B = 172 G	senkrecht	227
B = 56 G	parallel	229
B = 102 G	parallel	229
B = 153 G	parallel	229

Wie nicht anders zu erwarten, sind die Werte für T_C für alle Orientierungen und Magnetisierungs-Feldstärken näherungsweise gleich. Vergleich man unsere Werte mit dem Literaturwert von 229 K, stellt man eine überraschend gute Übereinstimmung fest, die aber angesichts der starken Schwankungen und unserer einfachen Methode zur Bestimmung des Minimums (Temperatur, bei der $\frac{\partial B}{\partial T}$ den kleinsten Wert annimmt) eher zufällig sein dürfte (insbesondere für $B_{EM} = 56\text{G}$). Würde man versuchen, das Minimum der Ableitung durch einen Fit (z.B. einer Gauß-Funktion) zu bestimmen, würde man vermutlich leicht unterschiedliche Werte für T_C erhalten, die aber trotzdem auf jeden Fall in der gleichen Größenordnung liegen würden.

3.2.4 Neukurve

Aus den Messungen der Magnetisierung für verschiedene Magnetisierungs-Feldstärken B_{EM} für den parallelen Einbau kann die Neukurve für Terbium, also die Abhängigkeit der Magnetisierung von der äußeren Feldstärke bei erstmaliger Magnetisierung, gewonnen werden. Dies wird dadurch ermöglicht, dass die Probe zwischen den Messungen wieder auf Raumtemperatur und damit über die Curie-Temperatur erwärmt wird, so dass die Magnetisierung und damit das ‘‘Gedächtnis‘‘ vollständig verschwindet. Somit erhält man die Neukurve aus den gemessenen Magnetisierungskurven, indem man bei einer festen Temperatur das (zur Magnetisierung der Probe proportionale) gemessene Magnetfeld B über der Feldstärke B_{EM} beim Abkühlen im Elektromagneten aufträgt. Um den Effekt der Schwankungen zu minimieren, haben wir auch hier wieder über Bereiche von 2 K gemittelt und außerdem die Neukurve bei verschiedenen Temperaturen ermittelt (Abbildung 7).

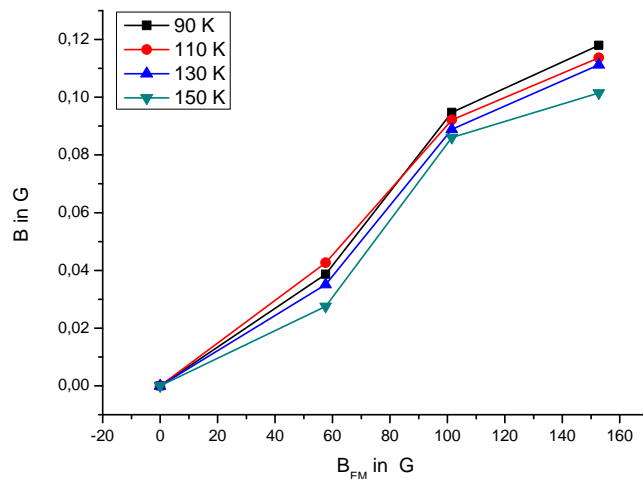


Abbildung 7: Neukurve für Tb

Die Aussagekraft dieser Kurven ist natürlich aufgrund der geringen Anzahl an Punkten beschränkt,

mit viel gutem Willen lässt sich aber doch erkennen, dass die Magnetisierung mit steigendem Feld zunächst ansteigt und sich dieser Anstieg dann bei größeren Feldstärken verlangsamt. Um diese Sättigung genauer zu untersuchen, wären aber noch deutlich mehr Datenpunkte nötig (insbesondere für größere Feldstärken).

3.3 Gadolinium

Neben der Terbium-Probe wurde noch eine einkristalline Gadolinium-Probe untersucht. Da die Curie-Temperatur von Gadolinium mit 292.5 K mit der Raumtemperatur vergleichbar ist, wurde die Probe zunächst auf über 300 K erhitzt, um eine vollständige Entmagnetisierung zu gewährleisten. Im Anschluss daran wurde die Probe in einem Magnetfeld von 1011 G abgekühlt und dann die in Abbildung 8 gezeigte Magnetisierungskurve aufgenommen. Da die Fluktuationen aufgrund der deutlich kleineren Magnetisierung und des trotz zusätzlichen Heizens recht langsamen Erwärmens oberhalb von 250 K weitaus größer sind als beim Terbium wurde zudem ein über Bereiche von 3 K gemittelter Durchschnittswert eingezeichnet.

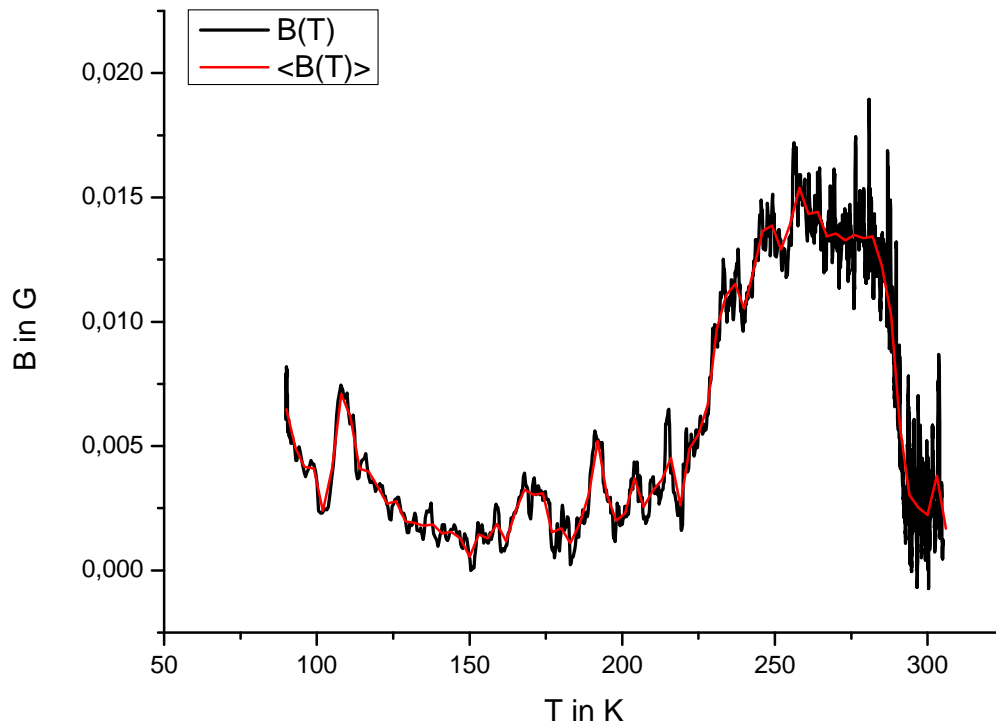


Abbildung 8: Magnetisierungskurve Gd

Wegen der besonderen magnetischen Eigenschaften von einkristallinem Gadolinium unterscheidet sich der Verlauf der Magnetisierungskurve doch deutlich von denen der Terbium-Probe. Oberhalb der Curie-Temperatur ist wie zu erwarten keine Magnetisierung zu beobachten. Unterhalb von T_C wächst die Magnetisierung stark an und ist parallel zur optischen Achse des Kristalls. Über einen Bereich von etwa 280 K bis 230 K bleibt die Magnetisierung ungefähr konstant, ehe sie dann

abzufallen scheint. Dieses Absinken des gemessenen Magnetfelds wird allerdings nicht durch eine kleiner werdende Magnetisierung der Probe verursacht, sondern dadurch, dass sich die Richtung der Magnetisierung von der Kristallachse wegdreht. Für noch kleinere Temperaturen ändert sich zunächst nicht viel am gemessenen Magnetfeld, unterhalb von etwa 150 K beginnt es dann aber wieder langsam anzusteigen, da sich die Richtung der Magnetisierung wieder näher an die c-Achse dreht.

Zur Bestimmung der Curie-Temperatur ist die Ableitung der Magnetisierung wegen der großen Schwankungen in diesem Temperaturbereich weniger geeignet. Sie lässt sich allerdings durch den steilen Anstieg der Magnetisierung bei T_C recht gut aus der Magnetisierungskurve bestimmen. Dazu haben wir den Punkt bestimmt, bei dem die Magnetisierung auf die Hälfte des Wertes aus dem Bereich 230 K bis 280 K abgefallen ist. Damit ergibt sich eine Curie-Temperatur von etwa 290 K, was im Bereich des Literaturwerts von 292.5 K liegt.