

Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene (P3)

Messung der Winkelkorrelation von γ -Strahlung

Betreuer: Jan Reich

Juliane Raasch, Matthias Ernst
Gruppe 10

Karlsruhe, 15.11.2010

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	2
1.1	Winkelkorrelation von γ -Strahlung	2
2	Experimenteller Aufbau	3
3	Durchführung	4
4	Auswertung	4
4.1	Vorbemerkung	4
4.2	Vorbereitung der Ergebnisse	5
4.3	Berechnung der Auflösungszeit der Koinzidenzzählers	6
4.4	Auswertung der summierten Messreihen	6
4.5	Auswertung der einzelnen Messreihen	7
4.6	Zusammenfassung	8

Ziel des Versuchs ist die Messung der Korrelation von γ -Strahlung von ^{60}Ni und der Anisotropie dieses Zerfalls.

1 Theoretische Grundlagen

1.1 Winkelkorrelation von γ -Strahlung

Die elektromagnetische Strahlung, die von einem Kern im angeregten Zustand (z.B. nach einem β -Zerfall) ausgesandt wird, ist isotrop, wenn die $2J_1 + 1$ Unterzustände des zunächst vorliegenden Zustands J_1 gleich besetzt sind und alle möglichen Übergänge von $|J_1 m_1\rangle$ in den Endzustand $|J_2 m_2\rangle$ gleichzeitig gemessen werden. Dabei sind die Übergänge in jeden einzelnen der $2J_2 + 1$ Unterzustände nicht isotrop.

Für einen Übergang des Zustands $|J_1 = 1 m_1\rangle$ mit $m_1 = \pm 1, 0$ in den Zustand $|J_2 = 0 m_2 = 0\rangle$ können Dipolübergänge mit $\Delta m = \pm 1, 0$ mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten auftreten:

$$\begin{aligned} W_{\Delta m = \pm 1} d\Omega &= \frac{3}{16} \pi (1 + \cos^2 \theta) d\Omega \\ W_{\Delta m = 0} d\Omega &= \frac{3}{8} \pi \sin^2 \theta d\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

Hierbei ist θ der Winkel zwischen der Emissionsrichtung und der Quantisierungsachse (überlicherweise die z -Achse). Offensichtlich sind diese Wahrscheinlichkeiten nicht isotrop, für Gleichbesetzung gilt dies aber für die Gesamtwahrscheinlichkeit

$$W_{\text{ges}} d\Omega = (W_{\Delta m = +1} + W_{\Delta m = 0} + W_{\Delta m = -1}) d\Omega = \frac{3}{4} \pi d\Omega \quad (2)$$

Experimentell sind die Übergänge der einzelnen Unterzustände nicht auflösbar, es wird somit immer die Gesamtwahrscheinlichkeit W_{ges} gemessen. Um dennoch eine Anisotropie messen zu können, muss also die Gleichbesetzung der Unterzustände aufgehoben werden. Dies kann entweder durch Polarisation der Kerne erfolgen oder indem zwei direkt aufeinander folgende Übergänge betrachtet werden, dies nennt man Korrelationsexperimente. Für eine Polarisation muss die aufgrund der Boltzmann-Verteilung bei Raumtemperatur herrschende Gleichbesetzung der Zustände durch sehr tiefe Temperaturen und/oder starke Magnetfelder aufgehoben werden.

Bei Korrelationsexperimenten sind diese Bedingungen nicht nötig, jedoch müssen dort zwei (im Rahmen der Detektorauflösung) gleichzeitige Übergänge stattfinden, wobei dann der erste Übergang eine Vorzugsrichtung bestimmt und deswegen für den zweiten eine Anisotropie vorliegt. Zweckmäßigerweise wählt man die Quantisierungsachse in Emissionsrichtung, also $\theta = 0$. So verschwindet z.B. für eine Kaskade von J_3 über $J_2 = 1$ nach $J_1 = 0$ die Wahrscheinlichkeit $W_{\Delta m = 0} d\Omega = 0$ und $W_{\Delta m = \pm 1} = \frac{3}{8} \pi d\Omega$. Der Zustand $|J_1 m_1 = 0\rangle$ ist also nicht besetzt und der zweite Übergang erfolgt anisotrop.

Bei der Messung von Koinzidenzen gilt für den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{i=1}^{i_{\max}} A_{2i} P_{2i}(\cos \theta) \quad (3)$$

wobei A_j die Zerfallskoeffizienten, P_j die Legendrepolynome vom Grad j und $i_{\max} = \min(L_1, L_2, J_2)$, also das Minimum aus den Drehimpulsen L_1 und L_2 der Strahlungen und des Spins J_2 des Zwischenzustands ist. Um die (unbekannten) Koeffizienten zu eliminieren, wird die Korrelationsfunktion $K(\theta)$ definiert zu

$$K(\theta) = \frac{\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}}{\frac{d\sigma(\pi/2)}{d\Omega}} = 1 + \sum_{i=1}^{i_{\max}} a_{2i} \cos^{2i} \theta \quad (4)$$

mit den nur noch drehimpulsabhängigen Komponenten a_{2i} . Das im Versuch verwendete ^{60}Co -Präparat emittiert elektrische Quadrupolstrahlung mit $L_1 = L_2 = 2$, der Spin des Zwischenzustands ist $J_2 = 2$, sodass $i_{\max} = 2$ und für die Korrelationsfunktion gilt

$$K^{60\text{Co}}(\theta) = 1 + a_2 \cos^2 \theta + a_4 \cos^4 \theta \quad (5)$$

Die theoretisch berechneten Werte sind $a_2 = \frac{1}{8}$ und $a_4 = \frac{1}{24}$. Diese Konstanten sollen jedoch in diesem Versuch durch Messung bestimmt werden.

Schließlich wird noch die Anisotropie An definiert, die die Abweichung einer gemessenen Winkelkorrelation von einer isotropen Verteilung angibt:

$$An = \frac{\frac{d\sigma(\pi)}{d\Omega} - \frac{d\sigma(\pi/2)}{d\Omega}}{\frac{d\sigma(\pi/2)}{d\Omega}} = \frac{K(\pi) - K(\pi/2)}{K(\pi/2)} = K(\pi) - 1 \stackrel{60\text{Co}}{=} a_2 + a_4 \quad (6)$$

2 Experimenteller Aufbau

Die Messungen erfolgen mittels zweier NaI-Szintillatoren, von denen einer fest montiert ist, während der andere in den Winkeln 90° , 135° und 180° zum ersten angebracht werden kann. Der schematische Aufbau ist in Abb. 1 dargestellt. Weiterhin wird eine Koinzidenzstufe mit einstell-

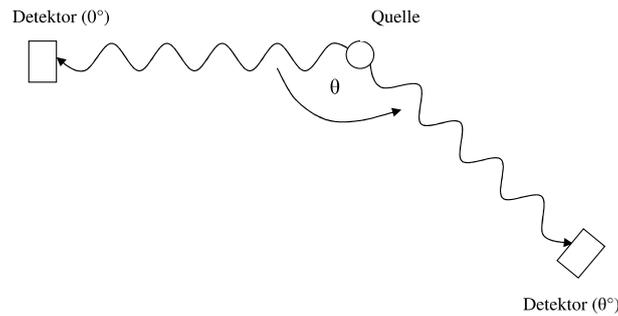


Abbildung 1: Schematischer Versuchsaufbau (Quelle: Protokoll von Simon Honc und Christian Hütterer zum selben Versuch)

barer Verzögerung verwendet, um durch eine zusätzliche Verzögerung zufällige Koinzidenzen von tatsächlich gleichzeitigen Zerfällen unterscheiden zu können. Das Blockschaltbild der Messanordnung kann Abb. 2 entnommen werden. Die Diskriminatoren werden eingesetzt, um Koinzidenzen

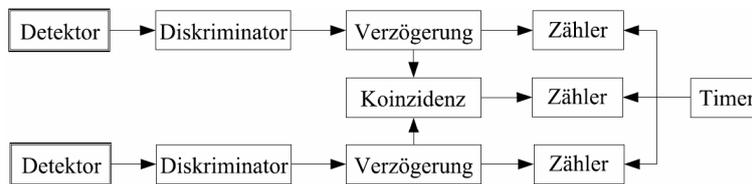


Abbildung 2: Schematischer Versuchsaufbau (Quelle: „blaues Buch“)

durch γ -Quanten, die nicht direkt aus der gewünschten Übergangskette stammen, sondern z.B. durch Comptonstreuung zum Detektor gelangen, dabei aber Energie verlieren, zu unterdrücken.

Um noch eine ausreichende Anzahl an korrekten Koinzidenzen zu messen, wird der Diskriminator auf etwa $\frac{2}{3}$ des Photopeaks eingestellt. Für das Verhältnis tatsächlicher Koinzidenzen N_K zu zufälligen Koinzidenzen N_Z gilt

$$\frac{N_K}{N_Z} = \frac{1}{\tau_A A} \quad (7)$$

wobei A die Aktivität der Probe und τ_A die (natürlich möglichst kleine) Auflösungszeit des Koinzidenzzählers bezeichnen. Die Aktivität der Probe darf also nicht zu groß sein, um die Messergebnisse nicht deutlich zu verschlechtern. τ_A kann aus den Zählraten N_1 und N_2 der beiden Detektoren bestimmt werden:

$$\tau_A = \frac{N_Z}{N_1 N_2} \quad (8)$$

3 Durchführung

Verwendet wurde ein ^{60}Co -Präparat, welches sich zu 99,86% in einer Kaskade von zwei γ -Zerfällen zu ^{60}Ni umwandelt (s. Abb. 3). Nach der Kalibration der Detektoren mit dem Diskriminator wur-

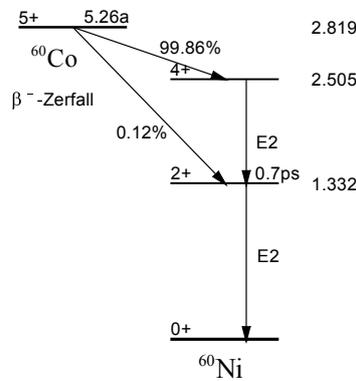


Abbildung 3: Zerfallsschema des verwendeten Präparats (Quelle: „blaues Buch“)

den die Zählraten der beiden Detektoren sowie die Koinzidenzen in drei Messreihen aufgenommen, wobei jeweils zwei Messungen bei jeder Einstellung des nicht fixierten Detektors (180° , 135° und 90°) während einer Messdauer von 400s durchgeführt wurden. Die Zählraten beider Detektoren sowie die Koinzidenzen wurden notiert. Zur Bestimmung der Zahl zufälliger Koinzidenzen wurde an der Koinzidenzstufe die maximale Verzögerung von 132ns eingestellt. Da dies deutlich länger als die mittlere Lebensdauer der beiden angeregten Zustände des entstandenen Nickel-Kerns ist, können so gemessene Koinzidenzen nur zufälliger Natur sein. Zuletzt wurde die Zählrate der Untergrundstrahlung aufgenommen.

4 Auswertung

4.1 Vorbemerkung

Zunächst muss der Zusammenhang zwischen dem differentiellen Wirkungsquerschnitt und der Zählrate klargestellt werden, denn im Experiment wurden Zählraten gemessen, die in der Vorbereitung gegebenen Formeln zur Auswertung gelten jedoch für differentielle Wirkungsquerschnitte. Geht

man davon aus, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt neben der Rate an gemessenen Teilchen nur von Eigenschaften des verwendeten Präparats sowie der beiden Detektoren abhängt und diese isotrop und für beide Detektoren gleich sind, also $\sigma_i = f \cdot N_i$, so bleiben in den Formeln nur die Zählraten N_i stehen. Im Folgenden werden daher die Zählraten für die Auswertung verwendet.

4.2 Vorbereitung der Ergebnisse

Vor der weiteren Auswertung wurde von jeder Messung der Untergrundwert des jeweiligen Detektors korrigiert. Außerdem wurden die Koinzidenzraten wie in der Versuchsanleitung vorgeschlagen durch das Produkt der jeweiligen Einzelzählraten dividiert, um systematische Fehler durch die Detektorempfindlichkeiten zu eliminieren. Dies ergibt die reduzierten Koinzidenzraten \tilde{n}_i :

$$\tilde{n}_i = \frac{N_{Ki}}{N_{1i}N_{2i}} \quad (9)$$

Weiterhin muss von den reduzierten Koinzidenzraten die reduzierte zufällige Koinzidenzrate subtrahiert werden. Diese beträgt $\tilde{n}_Z = 4,52 \cdot 10^{-10}$. Die korrigierten reduzierten Koinzidenzraten sind damit $n_i = \tilde{n}_i - \tilde{n}_Z$. Somit werden die in Tabelle 1 angegebenen Werte für die weitere Auswertung verwendet. Mit den korrigierten reduzierten Korrelationsraten kann die Korrelationsfunktion (siehe

	θ	1. Zähler (0°)	2. Zähler (θ)	corr. red. Koinzidenzrate n
1. Messreihe	180°	47586	51678	$7,60 \cdot 10^{-8}$
		45976	50952	$8,28 \cdot 10^{-8}$
	135°	45625	51060	$8,24 \cdot 10^{-8}$
		44684	50847	$7,61 \cdot 10^{-8}$
	90°	44599	48536	$7,53 \cdot 10^{-8}$
		44844	48059	$7,10 \cdot 10^{-8}$
2. Messreihe	180°	43800	49124	$7,44 \cdot 10^{-8}$
		43843	49845	$8,92 \cdot 10^{-8}$
	135°	44315	51248	$7,31 \cdot 10^{-8}$
		43759	50778	$8,01 \cdot 10^{-8}$
	90°	43844	48395	$6,98 \cdot 10^{-8}$
		43709	48583	$7,49 \cdot 10^{-8}$
3. Messreihe	180°	43525	49534	$8,58 \cdot 10^{-8}$
		43424	49263	$7,95 \cdot 10^{-8}$
	135°	43547	50771	$6,42 \cdot 10^{-8}$
		43369	50790	$7,63 \cdot 10^{-8}$
	90°	43491	48265	$6,81 \cdot 10^{-8}$
		43681	48171	$8,37 \cdot 10^{-8}$
Zufällige Koinzidenzen		43483	50880	

Tabelle 1: Korrigierte Messwerte und Koinzidenzraten

Gleichung 4) berechnet werden,

$$K(\theta)_i = \frac{n_i(\theta)}{n_i(90^\circ)}. \quad (10)$$

Weiterhin kann mit Gl. 5 aufgrund der gegebenen Winkel mit $\cos(135^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\cos(180^\circ) = -1$ die Koeffizienten a_2 sowie a_4 berechnet werden:

$$\begin{aligned} K(135^\circ) &= 1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_4 \\ K(180^\circ) &= 1 + a_2 + a_4 \\ \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 4K(135^\circ) - K(180^\circ) - 3 \\ a_4 = 2K(180^\circ) - 4K(135^\circ) + 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

Unter der Annahme, dass der beobachtete Zerfall einer Poisson-Verteilung genügt, kann die Standardabweichung der einzelnen Messwerte als Wurzel aus der gemessenen Zählrate berechnet werden:

$$\sigma_{N_i} = \sqrt{N_i} \quad (12)$$

4.3 Berechnung der Auflösungszeit der Koinzidenzzählers

Mit Gleichung 8 kann die Auflösungszeit des Koinzidenzzählers berechnet werden. Diese beträgt $\tau_A = 4,52 \cdot 10^{-10}$. Der Fehler wird mittels Gaußscher Fehlerfortpflanzung berechnet (die Fehler der einzelnen Zählraten sind wie oben angegeben die Wurzeln aus den Zählraten, diese werden aufgrund der Untergrundkorrektur jeweils noch fortgepflanzt).

$$\begin{aligned} \Delta\tau_A &= \sqrt{\left(\frac{\partial\tau_A}{\partial N_Z}\right)^2 \sigma_{N_Z}^2 + \left(\frac{\partial\tau_A}{\partial N_1}\right)^2 \sigma_{N_1}^2 + \left(\frac{\partial\tau_A}{\partial N_2}\right)^2 \sigma_{N_2}^2} \\ &= \tau_A \sqrt{\left(\frac{\sigma_{N_Z}}{N_Z}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{N_1}}{N_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{N_2}}{N_2}\right)^2} = 4,53 \cdot 10^{-11} \end{aligned} \quad (13)$$

Dabei wird der Fehler der Anzahl zufälliger Koinzidenzen als 0,1 angenommen, da bei einem Fehler dieses Wertes von 1 der Fehler in der Auflösungszeit quasi genauso groß wie diese würde. Um einen aussagekräftigen Wert für den Fehler der Auflösungszeit zu erhalten, müssten also sehr viel mehr zufällige Koinzidenzen gemessen werden. Die von uns bestimmte Auflösungszeit für den Koinzidenzzähler beträgt $(1,81 \cdot 10^{-7} \pm 1,81 \cdot 10^{-8})$ s. Die eingestellte Koinzidenzzeit von 10ns liegt also deutlich außerhalb der (aufgrund der wenigen gemessenen Koinzidenzen etwas willkürlichen) Fehlergrenzen und ist eine Größenordnung kleiner als der gemessene Wert. Dies ist im Wesentlichen auf den Wert von „1“ für zufällige Koinzidenzen zurückzuführen, eine längere Messung wäre hierfür sicher vorteilhaft.

4.4 Auswertung der summierten Messreihen

Gemäß Versuchsanleitung werden zunächst alle korrigierten reduzierten Koinzidenzraten zu den jeweiligen Winkeln summiert. Aufgrund der poissonverteilten Messwerte ist der Fehler der summierten Messwerte wieder die Wurzel aus der Summe der Messwerte. Weiterhin gilt für den Fehler einer einzelnen korrigierten reduzierten Koinzidenzrate $n_i = \tilde{n}_i - \tilde{n}_Z = \tilde{n}_i - \tau_A$ mit derselben Eigenschaft

$$\begin{aligned} \sigma_{n_i} &= \sqrt{\sigma_{\tilde{n}_i}^2 + \Delta\tau_A} = \sqrt{\tilde{n}_i \left(\frac{\sigma_{N_{Ki}}^2}{N_{Ki}^2} + \frac{\sigma_{N_{1i}}^2}{N_{1i}^2} + \frac{\sigma_{N_{2i}}^2}{N_{2i}^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \Delta\tau_A} \\ \sigma_{N_j} &\stackrel{=}{=} \sqrt{N_j} \sqrt{\tilde{n}_i \left(\frac{1}{N_{Ki}} + \frac{1}{N_{1i}} + \frac{1}{N_{2i}} \right)^{\frac{1}{2}} + \Delta\tau_A} \end{aligned} \quad (14)$$

Da die korrigierten reduzierten Konzidenzraten zum jeweiligen Winkel summiert werden, also $n_k^{(1)} = \sum_{j=1}^6 n_{kj}$ gilt für den Fehler dieser Summe mit den oben beschriebenen einzelnen Fehlern

$$\sigma_{n_k}^{(1)} = \sqrt{\sum_{j=1}^6 \sigma_{n_{kj}}^2} \quad (15)$$

Auf diese Weise wurden die in Tabelle 2 aufgeführten summierten reduzierten Koinzidenzraten mit den jeweiligen Fehlern berechnet. Außerdem können damit die Korrelationsfunktionen $K(\theta) = \frac{n(\theta)}{n(90^\circ)}$ sowie deren Fehler $\sigma_{K(\theta)} = K(\theta) \sqrt{\frac{\sigma_{n_k}^2(\theta)}{K^2(\theta)} + \frac{\sigma_{n_k}^2(90^\circ)}{K^2(90^\circ)}}$ bestimmt werden, die in derselben Tabelle angegeben sind. Mit diesen Werten können mit Gleichung 11 die Koeffizienten a_2 und a_4 sowie

Winkel θ	korr. red. Koinzidenzrate n	Fehler σ_n	Korr.fkt. $K(\theta)$	Fehler $\sigma_{K(\theta)}$
90°	$4,43 \cdot 10^{-7}$	$1,44 \cdot 10^{-8}$		
135°	$4,52 \cdot 10^{-7}$	$1,42 \cdot 10^{-8}$	1,021	$3,20 \cdot 10^{-2}$
180°	$4,88 \cdot 10^{-7}$	$1,48 \cdot 10^{-8}$	1,101	$3,34 \cdot 10^{-2}$

Tabelle 2: Summierte reduzierte Koinzidenzraten und deren Fehler

deren Fehler ermittelt werden:

$$\begin{aligned} a_2 &= 4K(135^\circ) - K(180^\circ) - 3 = -0,016 \\ a_4 &= 2K(180^\circ) - 4K(135^\circ) + 2 = 0,118 \\ \sigma_{a_2} &= \sqrt{\frac{1}{16} \sigma_{K(135^\circ)}^2 + \sigma_{K(180^\circ)}^2} = 0,132 \\ \sigma_{a_4} &= \sqrt{\frac{1}{16} \sigma_{K(135^\circ)}^2 + \frac{1}{4} \sigma_{K(180^\circ)}^2} = 0,144 \end{aligned} \quad (16)$$

Für a_2 liegt das theoretische Ergebnis $\frac{1}{8} = 0,125$ knapp jenseits der Fehlergrenzen, für a_4 mit $\frac{1}{24} \approx 0,042$ innerhalb. Angesichts der Tatsache, dass einerseits a_2 negativ und zudem kleiner als a_4 ist, was beides nicht sein sollte, und darüberhinaus die Fehlergrenzen deutlich größer als die ermittelten Werte sind, lässt sich jedoch nur der Schluss ziehen, dass die gemessenen Werte offensichtlich für eine vernünftige Auswertung nicht gut genug sind. Möglicherweise würde eine deutlich längere Messdauer zu besseren Ergebnissen führen.

Die Anisotropie ist schließlich $An = 0,101 \pm 0,033$.

4.5 Auswertung der einzelnen Messreihen

Neben der oben durchgeführten Auswertung aller Messreihen zu einem Winkel als Ganzes, die zu unbefriedigenden Ergebnissen führte, werden die Messreihen noch jeweils einzeln ausgewertet. Für jede Messreihe werden die korrigierten reduzierten Koinzidenzraten gemittelt (s. Tabelle 3), damit die Korrelationsfunktion $K(\theta)$, die Koeffizienten a_2 , a_4 und die Anisotropie An bestimmt, jeweils mit Fehler. Aus den jeweils drei Werten wird der Mittelwert bestimmt und der Fehler gemäß Versuchsvorbereitung als Standardabweichung dividiert durch die Wurzel aus Anzahl der Messwerte (6) berechnet, die Ergebnisse sind in Tabelle 4 zu finden.

Auch hier sind die Werte ähnlich schlecht wie bei der vorherigen Auswertung und wieder sind die Fehlergrenzen groß, vor allem bei a_2 . Das Fazit ist also ebenfalls, längere Messungen durchzuführen.

	θ	$\bar{n}(\theta)$	$\sigma_{\bar{n}(\theta)}$
1. Messreihe	180°	$7,94 \cdot 10^{-8}$	$4,07 \cdot 10^{-9}$
	135°	$7,93 \cdot 10^{-8}$	$4,15 \cdot 10^{-9}$
	90°	$7,32 \cdot 10^{-8}$	$4,12 \cdot 10^{-9}$
2. Messreihe	180°	$8,18 \cdot 10^{-8}$	$4,35 \cdot 10^{-9}$
	135°	$7,66 \cdot 10^{-8}$	$4,13 \cdot 10^{-9}$
	90°	$7,23 \cdot 10^{-8}$	$4,13 \cdot 10^{-9}$
3. Messreihe	180°	$8,27 \cdot 10^{-8}$	$4,39 \cdot 10^{-9}$
	135°	$7,02 \cdot 10^{-8}$	$3,99 \cdot 10^{-9}$
	90°	$7,59 \cdot 10^{-8}$	$4,25 \cdot 10^{-9}$

Tabelle 3: Auswertung der einzelnen Messreihen - reduzierte Koinzidenzen

Messreihe	$K(180^\circ)$	$\sigma_{K(180^\circ)}$	$K(135^\circ)$	$\sigma_{K(135^\circ)}$	a_2	σ_{a_2}	a_4	σ_{a_4}	An	σ_{An}
1	1,085	0,083	1,083	0,083	0,249	0,343	-0,163	0,372	0,085	0,083
2	1,131	0,088	1,059	0,083	0,105	0,344	0,026	0,377	0,131	0,088
3	1,089	0,084	0,925	0,074	-0,387	0,307	0,476	0,340	0,089	0,084
gemittelt	1,102	0,010	1,023	0,035	-0,011	0,136	0,113	0,134	0,102	0,010

Tabelle 4: Auswertung der einzelnen Messreihen - Koeffizienten und Anisotropien

4.6 Zusammenfassung

Die Messwerte wurden mit zwei Methoden ausgewertet, einmal als Summe aller Messungen und anschließend die drei Messreihen separat. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 dargestellt.

	1. Methode	2. Methode	theoretischer Wert
a_2	$-0,016 \pm 0,132$	$-0,011 \pm 0,136$	0,125
a_4	$0,118 \pm 0,144$	$0,113 \pm 0,134$	0,042
An	$0,101 \pm 0,033$	$0,102 \pm 0,010$	0,167

Tabelle 5: Vergleich der Methoden

Die Ergebnisse sind alle recht schlecht, mit der zweiten Methode sind sie geringfügig besser. Dies deutet darauf hin, dass sowohl die Messzeit erhöht werden muss als auch der Anlagenaufbau überdacht werden sollte. Die gemessene Auflösungszeit des Detektors von $4,52 \cdot 10^{-10} \pm 4,53 \cdot 10^{-11}$ liegt zwar recht gut im Rahmen der Erwartung, jedoch sollte auch hierfür deutlich länger gemessen werden.